

## 43 EJERCICIOS de POLINOMIOS

1. Calcular el **valor numérico del polinomio**  $P(x)$  para el valor de  $x$  indicado:

a)  $P(x)=x^2+1$ , para  $x=1$

b)  $P(x)=x^3+1$ , para  $x=-1$

(Soluc: a) 2; b) 0; c) 8; d) -4)

☞ Ejercicios libro: **pág. 31: 7; pág. 42: 25**

c)  $P(x)=x^2+x+2$ , para  $x=2$

d)  $P(x)=-x^2-x-2$ , para  $x=-2$

2. En cada caso, hallar  $k$  para el valor numérico indicado:

a)  $P(x)=2x^2-6x-k$ , siendo  $P(1)=7$

(Soluc:  $k=-11$ )

b)  $P(x)=-2x^4-6x^3+5x-k$ , siendo  $P(-2)=35$

(Soluc:  $k=-29$ )

c)  $P(x)=-\frac{1}{2}x^6-5x^4+5x^2-k$ , siendo  $P(-4)=58$

(Soluc:  $k=-3306$ )

d)  $P(x)=-8x^4-\frac{1}{4}x^2-12x+k$ , siendo  $P(1/2)=125$

(Soluc:  $k=2105/16$ )

3. Sumar convenientemente **monomios semejantes**:

a)  $2x-5x+7x+x=$

b)  $3x^2-7x^2+x^2-2x^2=$

c)  $2x^2y-3x^2y+5x^2y=$

d)  $-3xy^2+xy^2-6xy^2+8xy^2=$

e)  $3x^2y^2-xy^2+5x^2y-x^2y^2+2xy^2-x^2y=$

f)  $-2x^3yz+3x^3yz+5x^3yz-x^3yz=$

g)  $2ab^2-5a^2b-\frac{2}{3}ab^2-ab^2+\frac{1}{2}a^2b=$

h)  $-2xy^3+3x^3y+5xy^3-xy^3=$

(Soluc: a)  $5x$ ; b)  $-5x^2$ ; c)  $4x^2y$ ; d)  $0$ ; e)  $2x^2y^2+4x^2y+xy^2$ ; f)  $5x^3yz$ ; g)  $\frac{1}{3}ab^2-\frac{9}{2}a^2b$ ; h)  $2xy^3+3x^3y$ )

☞ Ejercicios libro: **pág. 30: 3a; pág. 42: 23a**

4. Dados  $P(x)=2x^5-3x^4+3x^2-5$  y  $Q(x)=x^5+6x^4-4x^3-x+7$ , hallar  $P(x)+Q(x)$  y  $P(x)-Q(x)$

(Soluc:  $3x^5+3x^4-4x^3+3x^2-x+2$ ;  $x^5-9x^4+4x^3+3x^2+x-12$ )

5. Dados  $P(x)=4x^3+6x^2-2x+3$ ,  $Q(x)=2x^3-x+7$  y  $R(x)=7x^2-2x+1$ , hallar:

a)  $P(x)+Q(x)+R(x)$

(Soluc:  $6x^3+13x^2-5x+11$ )

b)  $P(x)-Q(x)-R(x)$

(Soluc:  $2x^3-x^2+x-5$ )

c)  $P(x)+3Q(x)-2R(x)$

(Soluc:  $10x^3-8x^2-x+22$ )

6. Efectuar los siguientes **productos** en los que intervienen **monomios**, dando el resultado simplificado:

a)  $(-2x^3) \cdot \left(\frac{4}{5}x^2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) =$  (Soluc:  $-\frac{4}{5}x^6$ )

b)  $\left(-\frac{5}{7}x^7\right) \cdot \left(\frac{3}{5}x^2\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}x\right) =$  (Soluc:  $\frac{4}{7}x^{10}$ )

c)  $5x^3 \cdot 3x^2y \cdot (-4xz^3) =$  (Soluc:  $-60x^6yz^3$ )

d)  $-3ab^2 \cdot 2ab \cdot \left(-\frac{2}{3}a^2b\right) =$  (Soluc:  $4a^4b^4$ )

e)  $(3x^4-2x^3+2x^2+5) \cdot 2x^2 =$  (Soluc:  $6x^6-4x^5+4x^4+10x^2$ )

f)  $(-2x^5 + 3x^3 - 2x^2 - 7x + 1) \cdot (-3x^3) =$  (Soluc:  $6x^8 - 9x^6 + 6x^5 + 21x^4 - 3x^3$ )

g)  $\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{5}{4}\right) \cdot 12x^2 =$  (Soluc:  $8x^5 - 18x^4 + \frac{48}{5}x^3 - 15x^2$ )

h)  $\left(\frac{1}{2}ab^3 - a^2 + \frac{4}{3}a^2b + 2ab\right) \cdot 6a^2b =$  (Soluc:  $3a^3b^4 - 6a^4b + 8a^4b^2 + 12a^3b^2$ )

Ejercicios libro: **pág. 42: 23b y 30**

**7. Extraer el máximo factor común posible:**

a)  $4x^2 - 6x + 2x^3$  (Soluc:  $2x(x^2 + 2x - 3)$ )

b)  $12x^4y^2 + 6x^2y^4 - 15x^3y$  (Soluc:  $3x^2y(4x^2y + 2y^3 - 5x)$ )

c)  $-3xy - 2xy^2 - 10x^2yz$  (Soluc:  $xy(-3 - 2y - 10xz)$ )

d)  $-3x + 6x^2 + 12x^3$  (Soluc:  $3x(4x^2 + 2x - 1)$ )

e)  $2ab^2 - 4a^3b + 8a^4b^3$  (Soluc:  $2ab(b - 2a^2 + 4a^3b^2)$ )

f)  $2x^3 + 4x^2 - 8x$  (Soluc:  $2x(x^2 + 2x - 4)$ )

g)  $6x^3y^2 - 3x^2yz + 9xy^3z^2$  (Soluc:  $3xy(2x^2y - xz + 3y^2z^2)$ )

h)  $-2x(x-3)^2 + 4x^2(x-3)$  (Soluc:  $2x(x-3)(x+3)$ )

Ejercicios libro: **pág. 43: 38**

**8. Efectuar los siguientes productos:**

a)  $(3x^2 + 5x - 6)(8x^2 - 3x + 4) =$  (Soluc:  $24x^4 + 31x^3 - 51x^2 + 38x - 24$ )

b)  $(5x^3 - 4x^2 + x - 2)(x^3 - 7x^2 + 3) =$  (Soluc:  $5x^6 - 39x^5 + 29x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 3x - 6$ )

c)  $(2x^4 - 3x^2 + 5x)(3x^5 - 2x^3 + x - 2) =$  (Soluc:  $6x^9 - 13x^7 + 15x^6 + 8x^5 - 14x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 10x$ )

d)  $(ab^2 + a^2b + ab)(ab - ab^2) =$  (Soluc:  $a^3b^2 + a^2b^2 - a^2b^4 - a^3b^3$ )

e)  $(-x^6 + x^5 - 2x^3 + 7)(x^2 - x + 1) =$  (Soluc:  $-x^8 + 2x^7 - 2x^6 - x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 7x + 7$ )

f)  $(x^2y^2 - 2xy)(2xy + 4) =$  (Soluc:  $2x^3y^3 - 8xy$ )

g)  $10(x - 5 + y - 5) + (10 - x)(10 - y) =$  (Soluc:  $xy$ )

h)  $(x^2 - 4x + 3/2)(x + 2) =$  (Soluc:  $x^3 - 2x^2 - 13x/2 + 3$ )

i)  $(x^2 + 5x/2 + 35/3)(x - 6) =$  (Soluc:  $x^3 - 7x^2/2 - 10x/3 - 70$ )

j)  $(2x^2 + 4x + 2)(x - 1/2) =$  (Soluc:  $2x^3 + 3x^2 - 1$ )

**9. Efectuar las siguientes operaciones combinadas:**

a)  $(2x^2 + x + 3/2)(2x^2 - 3) + 8x + 7/2 =$  (Soluc:  $4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ )

b)  $(3x^3 + 5x^2/2 - 3x + 13)(2x^2 + 2) - (-6x + 24) =$  (Soluc:  $6x^5 + 5x^4 + 31x^2 + 2$ )

c)  $(3x^2 - 6x + 1)(x^3 - 2x/3 + 2) + 14x/3 =$  (Soluc:  $3x^5 - 6x^4 - x^3 + 10x^2 - 8x + 2$ )

d)  $-x/3 + 1/3 + (2x^2 - x/3 - 2/3)(3x^2 + 2) =$  (Soluc:  $6x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 1$ )

10. Dados los polinomios del ejercicio 5, hallar:

a)  $[R(x)]^2$                       b)  $P(x) \cdot Q(x) \cdot R(x)$                       c)  $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)]$                       d)  $P(x) \cdot Q(x) \cdot R(x)$

(Soluc: a)  $49x^4 - 28x^3 + 18x^2 - 4x + 1$ ; b)  $-14x^5 + 4x^4 + 9x^3 - 45x^2 + 13x - 4$ ; c)  $8x^6 + 40x^5 + 26x^4 + 6x^3 + 75x^2 - 25x + 24$   
d)  $56x^8 + 68x^7 - 72x^6 + 224x^5 + 244x^4 - 179x^3 + 225x^2 - 59x + 21$ )

👉 Ejercicios libro: **pág. 32: 8 y 9; pág. 42: 27 y 28**

11. Desarrollar, aplicando las **igualdades notables**:

a) $(x+2)^2 =$	h) $(x^3-2)^2 =$	n) $\left(2a - \frac{3}{2}\right)^2 =$	s) $\left(\frac{3x}{2} - \frac{1}{x}\right)^2 =$
b) $(x-3)^2 =$	i) $(x^2-1)(x^2+1) =$	o) $\left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right) =$	t) $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right)\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right) =$
c) $(x+2)(x-2) =$	j) $(2x^2+3x)^2 =$	p) $\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 =$	u) $\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right)^2 =$
d) $(3x+2)^2 =$	k) $(2x^2-3)^2 =$	q) $\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{4}\right)^2 =$	
e) $(2x-3)^2 =$	l) $(-x-3)^2 =$	r) $\left(2 + \frac{a}{3}\right)\left(-\frac{a}{3} + 2\right) =$	
f) $(5x+4)(5x-4) =$	m) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 =$		
g) $(x^2+5)^2 =$			

(Soluc: m)  $x^2 + x + \frac{1}{4}$ ; n)  $4a^2 - 6a + \frac{9}{4}$ ; o)  $1 - \frac{x^2}{4}$ ; p)  $4x^2 + 3x + \frac{9}{16}$ ; q)  $\frac{9}{4} - \frac{3x}{4} + \frac{x^2}{16}$ ; r)  $4 - \frac{a^2}{9}$ ;  
s)  $\frac{9}{4}x^2 - 3 + \frac{1}{x^2}$ ; t)  $\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{9}$ ; u)  $\frac{9}{4}x^2 + \frac{3x}{4} + \frac{1}{16}$ )

👉 Ejercicios libro: **pág. 32: 10a,b; pág. 34: 12; pág. 42: 31, 32 y 33**

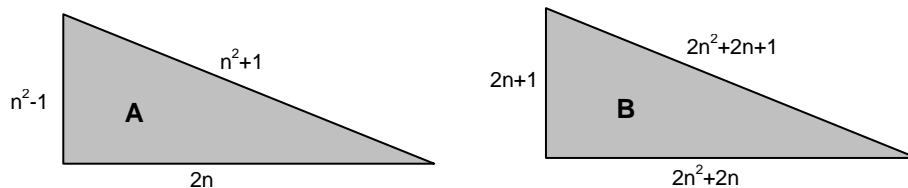
12. Operar y simplificar:

a) $(x+1)^2 + (x-2)(x+2) =$	e) $-3x + x(2x-5)(2x+5) - (1-x^2)^2 =$
b) $(3x-1)^2 - (2x+5)(2x-5) =$	f) $(3x-1)^2 - (-5x^2-3x)^2 - (-x+2x^2)(2x^2+x) =$
c) $(2x+3)(-3+2x) - (x+1)^2 =$	
d) $(-x+2)^2 - (2x+1)^2 - (x+1)(x-1) =$	

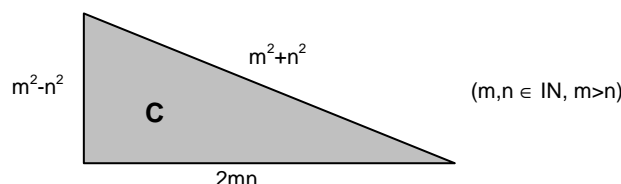
👉 Ejercicios libro: **pág. 42: 34**

(Soluc: a)  $2x^2 + 2x - 3$ ; b)  $5x^2 - 6x + 26$ ; c)  $3x^2 - 2x - 10$ ; d)  $-4x^2 - 4x + 4$ ; e)  $-x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 28x - 1$ ; f)  $-29x^4 - 30x^3 + x^2 - 6x + 1$ )

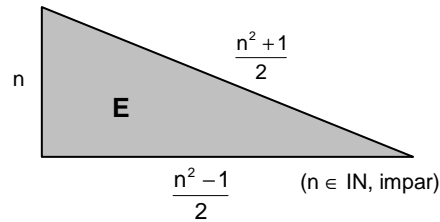
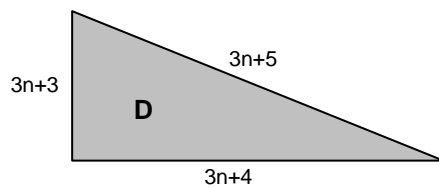
13. El matemático griego Pitágoras conocía las dos siguientes posibles formas de construir un triángulo rectángulo con sus tres lados de longitud entera, llamadas **ternas pitagóricas**, sin más que dar valores a  $n \in \mathbb{N}$ :



Por su parte, Euclides conocía la siguiente fórmula general, que engloba a las dos anteriores:



Finalmente, he aquí otras dos ternas pitagóricas de autor desconocido:



Demostrar la veracidad de estas fórmulas. Generar algunos casos concretos.

14. Demostrar que  $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

15. Desarrollar, aplicando el **triángulo de Tartaglia**:

- |                                   |                                   |                                    |                                        |
|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|----------------------------------------|
| a) $(x+2)^4$                      | g) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^5$ | m) $(2x^2-4)^4$                    | r) $\left(\frac{x}{2}-3\right)^6$      |
| b) $(x^2+3)^6$                    | h) $(a-b)^5$                      | n) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^5$  | s) $(-x-1)^4$                          |
| c) $(2x^2+3y)^6$                  | i) $(x-3)^3$                      | o) $(2-3x^2)^5$                    | t) $(2x-1)^5$                          |
| d) $(2x^3+5)^5$                   | j) $(3x-2)^4$                     | p) $\left(2x-\frac{1}{3}\right)^4$ | 👉 Ejercicio libro: <b>pág. 32: 10c</b> |
| e) $(2x^4+5x)^5$                  | k) $(x^2-3x)^5$                   | q) $(2x-3)^6$                      |                                        |
| f) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$ | l) $(3x-2y)^6$                    |                                    |                                        |

(Sol: a)  $x^4+8x^3+24x^2+32x+16$ ; b)  $x^{12}+18x^{10}+135x^8+540x^6+1215x^4+1458x^2+729$ ;  
c)  $64x^{12}+576x^{10}y+2160x^8y^2+4320x^6y^3+4860x^4y^4+2916x^2y^5+729y^6$ ; d)  $32x^{15}+400x^{12}+2000x^9+5000x^6+6250x^3+3125$ ;  
e)  $32x^{20}+400x^{17}+2000x^{14}+5000x^{11}+6250x^8+3125x^5$ ; f)  $x^4+4x^2+6+4/x^2+1/x^4$ ; g)  $x^5+5x^4/2+5x^3/2+5x^2/4+5x/16+1/32$ ;  
h)  $a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$ ; i)  $x^3-9x^2+27x-27$ ; j)  $81x^4-216x^3+216x^2-96x+16$ ;  
k)  $x^{10}-15x^9+90x^8-270x^7+405x^6-243x^5$ ; l)  $729x^6-2916x^5y+4860x^4y^2-4320x^3y^3+2160x^2y^4-576xy^5+64y^6$ ;  
m)  $16x^8-128x^6+384x^4-512x^2+256$ ; n)  $x^5-5x^4/2+5x^3/2-5x^2/4+5x/16-1/32$ ; p)  $16x^4-32x^3/3+8x^2/3-8x/27+1/81$ ;  
r)  $x^6/64-9x^5/16+134x^4/16-135x^3/2+1215x^2/4-729x+729$ )

16. Efectuar los siguientes **cocientes** en los que intervienen **monomios**, dando el resultado simplificado:

- |                           |                                   |                                                          |                                      |
|---------------------------|-----------------------------------|----------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\frac{4x^3}{2x^2} =$  | e) $\frac{-3x^7}{-9x^4} =$        | i) $\frac{-12x^4+6x^3-4x^2}{-2x^2} =$                    | m) $\frac{-3a(a^3b)+5a^4b}{-a^2b} =$ |
| b) $\frac{8x^4}{-2x^2} =$ | f) $\frac{6x^3y^4}{2x^2y} =$      | j) $\frac{-6x^8-7x^4-\frac{3}{4}x^3}{-\frac{5}{3}x^3} =$ | n) $\frac{-3xy^2(-2x^3y)}{4x^2y} =$  |
| c) $\frac{7x^5}{2x^3} =$  | g) $\frac{-9a^4b^3c^2}{3ab^2c} =$ | k) $\frac{-8x^9+\frac{3}{2}x^5-x^4}{-\frac{3}{7}x^4} =$  |                                      |
| d) $\frac{-8x^3}{2x^2} =$ | h) $\frac{6x^5-9x^2+3x}{3x} =$    | l) $(-18x^3yz^3):(6xyz^3)=$                              |                                      |

(Soluc: h)  $2x^4-3x+1$ ; i)  $6x^2-3x+2$ ; j)  $18x^6/5+21x/5+9/20$ ; k)  $56x^6/3-7x/2+7/3$ ; l)  $-3x^2$ ; m)  $-2a^2$ ; n)  $3x^2y^2/2$ )

17. Efectuar los siguientes **cocientes**, indicando claramente el cociente  $C(x)$  y el resto  $R(x)$ , y comprobar el resultado mediante la regla  $D=d \cdot C+R$ :

- a)  $x^4 - x^3 + 7x^2 + x + 15 \overline{) x^2 + 2}$  (Soluc:  $C(x) = x^2 - x + 5$ ;  $R(x) = 3x + 5$ )
- b)  $2x^5 - x^3 + 2x^2 - 3x - 3 \overline{) 2x^2 - 3}$  (Soluc:  $C(x) = x^3 + x + 1$ ; División exacta)
- c)  $6x^4 - 10x^3 + x^2 + 11x - 6 \overline{) 2x^2 - 4x + 3}$  (Soluc:  $C(x) = 3x^2 + x - 2$ ; División exacta)
- d)  $x^3 + 2x^2 + x - 1 \overline{) x^2 - 1}$  (Soluc:  $C(x) = x + 2$ ;  $R(x) = 2x + 1$ )
- e)  $8x^5 - 16x^4 + 20x^3 - 11x^2 + 3x + 2 \overline{) 2x^2 - 3x + 2}$  (Soluc:  $C(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ ; División exacta)
- f)  $x^4 + 3x^3 - 2x + 5 \overline{) x^3 + 2}$  (Soluc:  $C(x) = x + 3$ ;  $R(x) = -4x - 1$ )
- g)  $x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 6 \overline{) x^4 + 1}$  (Soluc:  $C(x) = x - 2$ ;  $R(x) = 3x^2 - x - 4$ )
- h)  $x^2 \overline{) x^2 + 1}$  (Soluc:  $C(x) = 1$ ;  $R(x) = -1$ )
- i)  $3x^6 + 2x^4 - 3x^2 + 5 \overline{) x^3 - 2x + 4}$  (Soluc:  $C(x) = 3x^3 + 8x - 12$ ;  $R(x) = 13x^2 - 56x + 53$ )
- j)  $x^8 \overline{) x^2 + 1}$  (Soluc:  $C(x) = x^6 - x^4 + x^2 - 1$ ;  $R(x) = 1$ )
- k)  $x^3 - 4x^2 + 5x - 8 \overline{) x - 2}$  (Soluc:  $C(x) = x^2 - 2x + 1$ ;  $R = -6$ )
- l)  $2x^5 + 3x^2 - 6 \overline{) x + 3}$  (Soluc:  $C(x) = 2x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 51x + 153$ ;  $R(x) = -465$ )
- m)  $x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 2 \overline{) x - 1}$  (Soluc:  $C(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 2$ ; División exacta)
- n)  $3x^5 - x^4 + 8x^2 - 5x - 2 \overline{) x^2 - x + 1}$  (Soluc:  $C(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 5$ ;  $R(x) = x - 7$ )
- o)  $5x^4 - 2x^3 + x - 7 \overline{) x^2 - 1}$  (Soluc:  $C(x) = 5x^2 - 2x + 5$ ;  $R(x) = -x - 2$ )
- p)  $4x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 7 \overline{) 2x^2 - 3x + 5}$  (Soluc:  $C(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 8$ ;  $R(x) = -14x + 33$ )
- q)  $9x^3 + 3x^2 - 7x + 2 \overline{) 3x^2 + 5}$  (Soluc:  $C(x) = 3x + 1$ ;  $R(x) = -22x - 3$ )
- r)  $4x^4 - 3x^2 + 5x - 7 \overline{) 2x^2 + x - 3}$  (Soluc:  $C(x) = 2x^2 - x + 2$ ;  $R(x) = -1$ )
- s)  $4x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 5 \overline{) 2x^2 - x + 3}$  (Soluc:  $C(x) = 2x^3 + x^2 - x - 3$ ;  $R(x) = 14$ )
- t)  $6x^4 + 5x^2 - 3x + 8 \overline{) 3x^3 - 2x - 3}$  (Soluc:  $C(x) = 2x$ ;  $R(x) = 9x^2 + 3x + 8$ )
- u)  $4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1 \overline{) 2x^2 - 3}$  (Soluc:  $C(x) = 2x^2 + x + 3/2$ ;  $R(x) = 8x + 7/2$ )
- v)  $8x^4 + 3x^3 + 2x - 2 \overline{) 4x^2 + x - 3}$  (Soluc:  $C(x) = 2x^2 + x/4 + 23/16$ ;  $R(x) = 21x/16 + 37/16$ )
- w)  $2x^5 - x^3 + 3x - 9 \overline{) 2x^2 - x + 2}$  (Soluc:  $C(x) = x^3 + x^2/2 - 5x/4 - 9/8$ ;  $R(x) = 35x/8 - 27/4$ )
- x)  $6x^3 - 3x^2 + 2x - 5 \overline{) 3x - 2}$  (Soluc:  $C(x) = 2x^2 + x/3 + 8/9$ ;  $R(x) = -29/9$ )
- y)  $4x^4 - x^3 + x + 5 \overline{) 2x^2 - x + 3}$  (Soluc:  $C(x) = 2x^2 + x/2 - 11/4$ ;  $R(x) = -13x/4 + 53/4$ )
- z)  $6x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 8 \overline{) 3x^2 - 5x + 2}$  (Soluc:  $C(x) = 2x^2 + 13x/3 + 38/9$ ;  $R(x) = 121x/9 - 148/9$ )
- α)  $8x^4 - 3x^2 + 7x - 5 \overline{) 4x^2 - 3x + 2}$  (Soluc:  $C(x) = 2x^2 + 3x/2 - 5/8$ ;  $R(x) = 17x/8 - 15/4$ )
- β)  $6x^5 + 5x^4 + 31x^2 + 2 \overline{) 2x^2 + 2}$  (Soluc:  $C(x) = 3x^3 + 5x^2/2 - 3x + 13$ ;  $R(x) = 6x - 24$ )
- γ)  $3x^5 - 6x^4 - x^3 + 10x^2 - 8x + 2 \overline{) 3x^2 - 6x + 1}$  (Soluc:  $C(x) = x^3 - 2x/3 + 2$ ;  $R(x) = 14x/3$ )
- δ)  $6x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 1 \overline{) 3x^2 + 2}$  (Soluc:  $C(x) = 2x^2 - x/3 - 2/3$ ;  $R(x) = -x/3 + 1/3$ )
- ε)  $4x^4 \overline{) 2x^2 - 1}$  (Soluc:  $C(x) = 2x^2 + 1$ ;  $R(x) = 1$ )
- ζ)  $4x^4 + x^3 - x + 1 \overline{) 2x^2 - 1}$  (Soluc:  $C(x) = 2x^2 + x/2 + 1$ ;  $R(x) = -x/2 + 2$ )

18. Inventar una división de polinomios cuyo cociente sea  $C(x)=x^2-3x+1$ , el resto sea  $R(x)=x-1$  y el dividendo un polinomio de 4º grado.

19. Efectuar las siguientes divisiones mediante la **regla de Ruffini**, indicando claramente el cociente  $C(x)$  y el resto  $R(x)$ , y comprobar el resultado:

a)  $x^4-7x^3+8x^2-2 \mid x-1$  (Soluc:  $C(x)=x^3-6x^2+2x+2$ ; División exacta)

b)  $x^3-4x^2+5x-8 \mid x-2$  (Soluc:  $C(x)=x^2-2x+1$ ;  $R=-6$ )

c)  $2x^4+3x^3-4x^2+x-18 \mid x-2$  (Soluc:  $C(x)=2x^3+7x^2+10x+21$ ;  $R=24$ )

d)  $2x^5+3x^2-6 \mid x+3$  (Soluc:  $C(x)=2x^4-6x^3+18x^2-51x+153$ ;  $R=-465$ )

e)  $3x^4-10x^3-x^2-20x+5 \mid x-4$  (Soluc:  $C(x)=3x^3+2x^2+7x+8$ ;  $R=37$ )

f)  $2x^4-10x+8 \mid x+2$  (Soluc:  $C(x)=2x^3-4x^2+8x-26$ ;  $R=60$ )

g)  $10x^3-15 \mid x+5$  (Soluc:  $C(x)=10x^2-50x+250$ ;  $R=-1265$ )

h)  $x^3-2x^2-13x/2+3 \mid x+2$  (Soluc:  $C(x)=x^2-4x+3/2$ ; División exacta)

i)  $x^3-7x^2/2-10x/3-70 \mid x-6$  (Soluc:  $C(x)=x^2+5x/2+35/3$ ; División exacta)

j)  $x^4-2x^3/3+x^2/2+3x+1 \mid x+3$  (Soluc:  $C(x)=x^3-\frac{11}{3}x^2+\frac{23}{2}x-\frac{63}{2}$ ;  $R(x)=\frac{191}{2}$ )

k)  $x^3+2x^2+3x+1 \mid x-1$  (Soluc:  $C(x)=x^2+3x+6$ ;  $R=7$ )

l)  $x^4-2x^3+x^2+3x+1 \mid x-2$  (Soluc:  $C(x)=x^3+x+5$ ;  $R=11$ )

m)  $x^3+x^2+x+1 \mid x+1$  (Soluc:  $C(x)=x^2+1$ ; División exacta)

n)  $2x^4+x^3-2x^2-1 \mid x+2$  (Soluc:  $C(x)=2x^3-3x^2+4x-8$ ;  $R=15$ )

o)  $2x^4-7x^3+4x^2-5x+6 \mid x-3$  (Soluc:  $C(x)=2x^3-x^2+x-2$ ; División exacta)

p)  $x^5+1 \mid x-1$  (Soluc:  $C(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ ;  $R=2$ )

q)  $2x^3+3x^2-1 \mid x-1/2$  (Soluc:  $C(x)=2x^2+4x+2$ ; División exacta)

r)  $3x^3+2x^2+2x-1 \mid x-1/3$  (Soluc:  $C(x)=3x^2+3x+3$ ; División exacta)

s)  $x^4+x^3-x^2+x-1 \mid x+2$  (Soluc:  $C(x)=x^3-x^2+x-1$ ;  $R=1$ )

t)  $2x^3-x^2-x-3 \mid 2x-3$  (Soluc:  $C(x)=x^2+x+1$ ; División exacta)

(Ayuda: Dividir entre 2 ambos términos)

u)  $ax^3-3a^2x^2+2a^3x+1 \mid x-a$  (Soluc:  $C(x)=ax^2-2a^2x$ ;  $R=1$ )

☞ Ejercicios libro: **pág. 35: 15; pág. 43: 39**

### RECORDAR:

**TEOREMA DEL RESTO:** "El resto de la división de  $P(x)$  por  $x-a$  coincide con el valor numérico  $P(a)$ "

**Ejemplo:** Al efectuar la división de  $P(x)=x^2+x-2$  entre  $x-1$  se obtiene resto cero, como cabía esperar, puesto que  $P(1)=0$

**Utilidad:** El th. del resto permite predecir, sin necesidad de efectuar la división, si se trata de una división exacta.

20. Comprobar el **teorema del resto** mediante las divisiones anteriores.

21. Dado  $P(x)=2x^2-x-3$ , comprobar si es divisible por  $x+1$  o por  $x-2$  mediante el teorema del resto. Comprobar a continuación efectuando la división ¿Cuál es el otro factor por el que es divisible?  
(Soluc: Sí; NO;  $2x-3$ )

22. Determinar, aplicando el teorema del resto, el valor de **a** para que el resto de la división  $-x^5+3x^4+ax^3+9x^2+2x-7 \overline{) x-3}$  sea -1; comprobar, a continuación, el resultado obtenido haciendo la división. (Soluc:  $a=-3$ )

23. Averiguar, sin efectuar la división, cuáles de las siguientes divisiones son exactas:

- |                                      |             |                                   |             |
|--------------------------------------|-------------|-----------------------------------|-------------|
| a) $x^3-3x^2+2x-10 \overline{) x-4}$ | (Soluc: NO) | c) $x^6-1 \overline{) x-1}$       | (Soluc: Sí) |
| b) $x^3-x^2+x+14 \overline{) x+2}$   | (Soluc: Sí) | d) $x^5-3x^3+2x \overline{) x-4}$ | (Soluc: NO) |

24. Hallar, de dos formas distintas, el valor de **m** en cada caso para que las siguientes divisiones sean exactas:

- |                                         |                   |                                        |                      |
|-----------------------------------------|-------------------|----------------------------------------|----------------------|
| a) $x^3+8x^2+4x+m \overline{) x+4}$     | (Soluc: $m=-48$ ) | e) $x^2+4x-m \overline{) x+3}$         | (Soluc: $m=-3$ )     |
| b) $2x^3-10x^2+mx+25 \overline{) x-5}$  | (Soluc: $m=-5$ )  | f) $x^3-5x^2+m \overline{) x-1}$       | (Soluc: $m=4$ )      |
| c) $2x^4+mx^3-4x^2+40 \overline{) x-2}$ | (Soluc: $m=-7$ )  | g) $5x^4+2x^2+mx+1 \overline{) x-3}$   | (Soluc: $m=-424/3$ ) |
| d) $mx^2-3x-744 \overline{) x-8}$       | (Soluc: $m=12$ )  | h) $x^5-4x^3+mx^2-10 \overline{) x+1}$ | (Soluc: $m=7$ )      |

### RECORDAR:

**TEOREMA DEL FACTOR:** "P(x) es divisible por x-a (o dicho de otra forma, P(x) contiene el factor x-a) si se cumple que P(a)=0"

**Ejemplo:** Dado  $P(x)=x^2+x-2$ , como  $P(1)=0$ , podemos asegurar que P(x) es divisible por x-1

De hecho, puede comprobarse que al factorizarlo se obtiene  $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

(Nótese que el th. del factor es a la división polinómica lo que los criterios de divisibilidad eran a la división numérica)

25. Comprobar, sin efectuar la división, que  $x^{99}+1 \overline{) x+1}$  es exacta. (Soluc: Al hacer  $P(-1)$ , sale 0)
26. Comprobar que  $x^2-2x-3$  es divisible por x-3 sin efectuar la división. Comprobar el resultado obtenido haciendo la división. ¿Por qué otro factor es divisible? (Soluc:  $P(x)=(x-3)(x+1)$ )
27. Estudiar si  $P(x)=x^2+x-2$  es divisible por x+2 y/o por x-3, sin efectuar la división. Comprobar el resultado obtenido haciendo la división. ¿Por qué otro factor es divisible? (Soluc: divisible por x+2 pero no por x-3)
28. Estudiar si  $P(x)=x^5-32$  es divisible por x-2 sin efectuar la división (Comprobar el resultado obtenido haciendo la división). (Soluc: Sí es divisible)
29. Sin necesidad de efectuar la división, ¿podemos asegurar que el polinomio  $P(x)=x^{50}+x^{25}-x-1$  es divisible por x-1? ¿Por qué?
30. **TEORÍA:** Razonar, mediante ejemplos, que el teorema del factor viene a ser a la división polinómica lo que los criterios de divisibilidad eran a la división numérica

### FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS:

31. Dados los siguientes polinomios cuadráticos se pide:
- Obtener sus raíces y comprobarlas.
  - A partir de las raíces anteriores, factorizarlos.
  - Comprobar dicha factorización.

- a)  $x^2-5x+6$     b)  $x^2-2x-8$     c)  $x^2-6x+9$     d)  $4x^2+23x-6$     e)  $x^2+x+1$     f)  $6x^2-7x+2$

32. Dados los siguientes polinomios se pide: **i)** Obtener sus raíces por Ruffini. **ii)** Comprobar dichas raíces sustituyéndolas en  $P(x)$  **iii)** Factorizar  $P(x)$  a partir de sus raíces y comprobar dicha factorización:

- |                                |                             |                               |                                  |
|--------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| a) $P(x)=x^3-4x^2+x+6$         | (Soluc: $x=-1,2,3$ )        | d) $P(x)=x^4-2x^2+1$          | (Soluc: $x=-1$ doble, $1$ doble) |
| b) $P(x)=x^4-8x^3+17x^2+2x-24$ | (Soluc: $x=-1,2,3,4$ )      | e) $P(x)=6x^4+x^3-25x^2-4x+4$ | (Soluc: $x=\pm 2, -1/2, 1/3$ )   |
| c) $P(x)=x^3+x^2-5x+3$         | (Soluc: $x=1$ doble, $-3$ ) |                               |                                  |

33. Sabiendo que una de sus raíces es  $x=1/2$ , factorizar  $P(x)=2x^4-3x^3+3x^2-3x+1$

34. Dadas las siguientes ecuaciones polinómicas se pide:

- Resolverlas por Ruffini.
- Comprobar las soluciones obtenidas sustituyéndolas en la ecuación.
- A partir de sus raíces, factorizar el polinomio y comprobar dicha factorización.

- |                                  |                                                                             |
|----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| a) $x^3-6x^2+11x-6=0$            | (Soluc: $x=1,2,3$ )                                                         |
| b) $x^3+x^2-9x-9=0$              | (Soluc: $x=-1,-3,3$ )                                                       |
| c) $x^4-2x^3-17x^2+18x+72=0$     | (Soluc: $x=-2, \pm 3, 4$ )                                                  |
| d) $x^4-x^3-13x^2+25x-12=0$      | (Soluc: $x=-4, 1$ doble, $3$ )                                              |
| e) $x^4-x^3+2x^2+4x-8=0$         | (Soluc: carece de raíces $\in \mathbb{Q}$ )                                 |
| f) $3x^3+x^2-8x+4=0$             | (Soluc: $x=-2, 1, 2/3$ )                                                    |
| g) $x^5-3x^4-5x^3+15x^2+4x-12=0$ | (Soluc: $x=\pm 1, \pm 2, 3$ )                                               |
| h) $x^4-5x^2+4=0$                | (Soluc: $x=\pm 1, \pm 2$ ) (También se puede hacer por ecuación bicuadrada) |
| i) $x^4+2x^3-5x^2-6x=0$          | (Soluc: $x=-3,-1,0,2$ )                                                     |
| j) $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$       | (Soluc: $x=1, \pm 2, -3$ )                                                  |
| k) $x^3-5x^2-5x-6=0$             | (Soluc: $x=6$ )                                                             |
| l) $x^5-2x^4-x+2=0$              | (Soluc: $x=\pm 1, 2$ )                                                      |
| m) $x^4-6x^3+11x^2-6x=0$         | (Soluc: $x=0, 1, 2, 3$ )                                                    |
| n) $6x^4+11x^3-28x^2-15x+18=0$   | (Soluc: $x=-1,-3, 2/3, 3/2$ )                                               |
| o) $x^3+3x^2-10x-24=0$           | (Soluc: $x=-4,-2,3$ )                                                       |
| p) $x^3+2x^2-15x-36=0$           | (Soluc: $x=-3$ doble, $4$ )                                                 |
| q) $x^3-3x^2+3x-1=0$             | (Soluc: $x=1$ triple)                                                       |

35. Dados los siguientes polinomios, se pide:

- Obtener sus raíces por Ruffini.
- Comprobar dichas raíces sustituyéndolas en  $P(x)$
- Factorizar  $P(x)$  a partir de sus raíces y comprobar dicha factorización.

- |                              |                                                  |
|------------------------------|--------------------------------------------------|
| a) $P(x)=x^4+4x^3+7x^2+8x+4$ | (Soluc: $x=-2,-1$ )                              |
| b) $P(x)=6x^3+7x^2-9x+2$     | (Soluc: $x=-2, 1/2, 1/3$ )                       |
| c) $P(x)=x^4-x^3+2x^2-4x-8$  | (Soluc: $x=-1, 2$ )                              |
| d) $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$ | (Soluc: $x=2, 3, \pm 1$ )                        |
| e) $P(x)=x^4-3x^3+5x^2-9x+6$ | (Soluc: $x=1, 2$ )                               |
| f) $P(x)=x^4-5x^2+4$         | (También se puede hacer por ecuación bicuadrada) |
| g) $P(x)=x^4-5x^2-36$        | (También se puede hacer por ecuación bicuadrada) |
| h) $P(x)=x^4-2x^3-2x^2-2x-3$ | (Soluc: $x=-1, 3$ )                              |
| i) $P(x)=x^4-6x^2+7x-6$      | (Soluc: $x=2,-3$ )                               |
| j) $P(x)=x^4-3x^3-3x^2+7x+6$ | (Soluc: $x=-1$ doble, $2, 3$ )                   |



- k)  $P(x)=12x^4-25x^3+25x-12$  (Soluc:  $x=\pm 1, 4/3, 3/4$ )  
 l)  $P(x)=2x^4-x^3+6x^2-7x$  (Soluc:  $x=0, 1$ )  
 m)  $P(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$  (Soluc:  $x=1$ )  
 n)  $P(x)=x^5-x^3-x^2+1$  (Soluc:  $x=\pm 1$ )  
 o)  $P(x)=x^4-2x^3-7x^2+5x-6$  (Soluc: carece de raíces  $\in \mathbb{Q}$ )  
 p)  $P(x)=3x^4-9x^3-6x^2+36x-24$  (Soluc:  $x=1, 2$  doble,  $-2$ )  
 q)  $P(x)=6x^4+11x^3-13x^2-16x+12$  (Soluc:  $x=1, -2, 2/3, -3/2$ )  
 r)  $P(x)=x^6+6x^5+9x^4-x^2-6x-9$  (Soluc:  $x=\pm 1, -3$  doble)

☞ Ejercicios libro: **pág. 37: 19; pág. 43: 55 y 57**

### CONSECUENCIA:

**TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA:** "Un polinomio de grado  $n$  tiene a lo sumo  $n$  raíces reales"

36. Resolver la ecuación  $2x^3 - 3x^2 = -\frac{1}{2}$ , sabiendo que una de sus raíces es  $1/2$  (Soluc:  $x=\pm 1/2, 3/2$ )
37. Resolver la ecuación  $\sqrt[3]{x-2}=x$  (Sol:  $x=2$ )
38. ¿Serías capaz de resolver la ecuación  $\sqrt[3]{x} = 2\sqrt{x} - 1$ ? Aunque es un poco complicada para este curso, puedes resolverla con los conocimientos ya adquiridos: tendrás que aplicar binomio de Newton y Ruffini... (Sol:  $x=1$ )
39. Resolver: a)  $\left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ y - x^2 = 1 \end{array} \right\}$  (Soluc:  $x=1, y=2$ )      b)  $\left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \\ y = \sqrt{x^3} \end{array} \right\}$  (Soluc:  $x=1; y=1$ )
40. Inventar una ecuación polinómica que tenga únicamente por soluciones  $x=-2, x=1$  y  $x=3$
41. Inventar, de dos formas distintas, una ecuación polinómica que tenga únicamente como raíces 1 y 2
- ☞ Ejercicios libro: **pág. 43: 48, 50 y 52**
42. Determinar el polinomio de grado 3 que verifica:  $P(-1)=P(2)=P(-3)=0$  y  $P(-2)=18$
43. Un polinomio de grado 3, ¿cuántas raíces puede tener como mínimo? Razonar la respuesta. (Soluc: 1 raíz)