Fundación Universitaria
TECNOLÓGICO COMFENALCO

NOTAS DE CLASE PARA UN CURSO DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

Alfredo Yerman Cortés Verbel

NOTAS DE CLASE PARA UN CURSO DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

Alfredo Yerman Cortés Verbel

NOTAS DE CLASE PARA UN CURSO DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

Autor: Alfredo Yerman Cortés Verbel

ISBN 9789585219588

Editorial Tecnológico Comfenalco
Fundación Universitaria Tecnológico
Comfenalco Sede A: Barrio España Cr. 44D
No 30A - 91 Teléfonos: (57) (5) 6723700
Cartagena de Indias D. T. y C., Colombia
www.tecnologicocomfenalco.edu.co

Diseño y diagramación
Alpha Editores
Bosque, Tv. 51 # 20-109
Tels.: 57-5 662 4222
E-mail: ventas@alpha.co
www.alpha.co
Cartagena de Indias, Bolívar, Colombia

Primera edición, 2019

Sello Editorial
Tecnológico Comfenalco

Agradezco:

A Dios, la sabiduría e inteligencia son sus dones.

Al campeón, para que siempre esté orgulloso de su papá.

A la niña de mis sueños, fuente de mi inspiración.

CONTENIDO

I. LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS

II. ÁLGEBRA

III. GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

PRÓLOGO

Sin duda alguna que la labor docente constituye un escenario no solo de aprendizaje de estudiantes y docentes, es más que eso; es ante todo, un espacio de investigación diaria y permanente. Las experiencias de enseñanza y aprendizaje validan la loable tarea del profesor Alfredo Yerman Cortés Verbel, quien a través de este ejercicio de investigación, da un sello de calidad de lo que se logra construir, crear o estructurar en el aula de clases con relación a la matemática.

El libro que se presenta, el cual tengo el honor de realizar el prólogo, es el resultado de la experiencia docente y específicamente, de su quehacer pedagógico en la enseñanza de las matemáticas en la facultad de Ingeniería de la Fundación Universitaria Tecnológico Comfenalco. Es, precisamente, el fortalecimiento y desarrollo de procesos lógicos matemáticos en la formación de ingenieros.

Estas *Notas de clase para un curso de álgebra y geometría* estructuran el componente básico que debe abordar todo estudiante que se forma en el campo de las ingenierías, pues, indudablemente la aplicación de la matemática es lo que ha posicionado a la ingeniería en el lugar que ocupa actualmente. En este sentido, el interés del libro está orientado a cómo estudiar estos componentes de una manera muy didáctica.

Cabe destacar que frente a los procesos de globalización, los ingenieros deben ser muy competitivos, tener claro el papel que desempeñan las matemáticas en los procesos creativos. Por ello estas notas de clase replantean saberes, metodología de enseñanza, de modo que los estudiantes tengan la capacidad para ser creativos, innovadores y razonen en torno a la solución de problemas del área de desarrollo que les compete.

Finalmente, este libro es una propuesta diferente, con una mirada didáctica pedagógica para la enseñanza del álgebra y la geometría. Está concebido para que sea aplicado por los docentes de esta área y consultado por estudiantes de niveles universitarios. Es una contribución a los procesos de calidad de la educación. En síntesis, abre una ventana de abordaje de estas disciplinas desde la perspectiva de la ingeniería, su pertinencia y relevancia en la formación de ingenieros.

ENYEL MANYOMA LEDESMA
Directora de Pedagogía y Formación Integral
Fundación Universitaria Tecnológico Comfenalco

Parte I

LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS

"Si la gente no cree que las matemáticas son simples, es solo porque no se dan cuenta de lo complicada que es la vida."

JOHN VON NEUMANN

1. LÓGICA

1.1 Generalidades

De forma generalizada, se acepta que el trabajo de los ingenieros consiste fundamentalmente en detectar, reconocer y resolver problemas. Pero, en este siglo, cuando la evolución social ha llevado a la humanidad a la Sociedad de la Información y el Conocimiento, esta función también se ha convertido en parte integral de la labor de la mayoría de profesionales. Los seres humanos conviven en medio de problemas, desde los más simples hasta los más complejos, y cuando se reúnen en conglomerados sociales se incrementa su complejidad. Esta sociedad, más que nunca antes en la historia, enfrenta complicados desafíos que debe comprender, analizar y solucionar para asegurar su supervivencia y proyectar la de la siguiente (Gellatly, 1986).

Para atender a estos requerimientos, los sistemas de formación deben mantener una continua comunicación con la realidad, con el objetivo de preparar a los futuros profesionales para que se desempeñen adecuadamente cuanto les corresponda vivirla. Este objetivo tiene una característica básica: la necesidad de desarrollar un pensamiento lógico y una adecuada interpretación abstracta para lograr la resolución eficiente y efectiva de esos problemas. En la formación de ingenieros en el siglo *XXI* esta necesidad es un componente básico, porque su desempeño está regido ampliamente por una adecuada interpretación del problema antes que le presenten una solución.

La práctica ingenieril se puede describir como la solución óptima y práctica de problemas físicos, mediante el análisis lógico, sistemático e integral de los hechos científicos. Sin embargo, el número, la complejidad y la falta de claridad de los mismos, son tan amplios que se debe adicionar el juicio y la invariabilidad.

Estos componentes hacen parte activa de la intuición personal, la cual se considera como un arte relacionado enteramente con las ciencias de la lógica y la abstracción. El juicio es un componente bien reconocido de la práctica de la ingeniería, porque la eficiencia y efectividad de las soluciones que se proponen también dependen de una serie de factores intangibles.

La ingeniería es un campo de las ciencias aplicadas que descansa sobre las bases de la *matemática, la física y la química.* Para lograr que su trabajo responda a las necesidades sociales, sus profesionales deben adquirir una comprensión amplia y funcional de los procesos, además de un adecuado dominio de las habilidades técnicas (Hakkarainen et al., 2004; Moss et al., 2006). Entre muchas otras habilidades, deben lograr una comprensión profunda de los conceptos abstractos, desarrollar la capacidad de pensamiento algorítmico y un razonamiento lógico adecuado (Eckerdal and Berglund, 2005; Faux, 2006).

Diversos estudios indican que la habilidad de razonamiento lógico no es independiente de la capacidad intelectual general, y que los estudiantes que razonan lógicamente y resuelven adecuadamente los problemas tienden a obtener mejores resultados en cualquier materia científica(Johnson y Lawson, 1998; Capizzo et al., 2006). Por lo tanto, la formación en ingeniería, como área científica, debe incluir a la lógica, la abstracción, la matemática y la resolución de problemas en todos los niveles, pues como profesionales, se espera que dominen y apliquen el pensamiento lógico.

Paradójicamente, pocos programas en el mundo atienden adecuadamente esta necesidad formativa (Moss et al., 2006). Los ingenieros deben desarrollar la capacidad lógico-interpretativa y abstractiva para alcanzar ese pensamiento, porque el objetivo formativo, al igual que con los científicos, es que sean lógicos y sistemáticos en su razonamiento. Sin embargo, nuevamente, casi ninguno de los modelos educativos actuales incluye estas cuestiones en sus procesos. *El éxito de la ingeniería del siglo XXI depende en gran medida de que los estudiantes hayan convivido desde los primeros niveles formativos con la lógica y el razonamiento lógico, para que puedan potencializarlos y aplicarlos adecuadamente*. Desarrollar esta capacidad no es un proceso de último momento antes de ser profesional; el proceso debe iniciar desde la escuela e ir madurando en la misma medida que se incrementa el nivel de formación y la exigencia de los problemas.

1.1.1 La necesidad de la lógica en la formación ingenieril

La formación adecuada en lógica permite desarrollar y aplicar procesos de creatividad. Esta relación se puede comprender mediante una comparación entre el funcionamiento del cerebro, durante el proceso de pensamiento, y el de un computador al calcular (Gazzaniga, 2002). Cuando una persona piensa almacena sus recuerdos como información relacionada, de la misma forma que un computador almacena datos en archivos para su posterior recuperación. Cuando se necesita algún dato, tanto el cerebro como el computador buscan los datos en los archivos almacenados y los ordenan lógicamente para convertirlos en información, y si recopilan nuevos datos los asignan fácilmente al archivo correspondiente. La cuestión se complica cuando los datos requeridos no se encuentran almacenados o están corruptos. El computador se limitará a informar que no encuentra información relacionada o que no puede procesarla por algún error de *hardware* o *software*; por el contrario, el cerebro recurre a la capacidad creativa para correlacionar, combinar, mezclar, probar, abstraer y representar los datos desde otros archivos, e intentará responder a la solicitud aplicando un algoritmo como el que se presenta en la Figura 1.1. Claro está, para lograrlo, la persona necesita haber recibido una adecuada formación en lógica, de no ser así responderá cual simple computador: “ eso no me lo enseñaron ”.

Resolver problemas lógicamente es un proceso de búsqueda a través de datos conocidos, a los que se adiciona información para complementar el archivo básico en ese tema en particular. Por ejemplo, el cerebro para resolver un problema matemático, aplicando razonamiento lógico, primero busca en el archivo cómo aplicar matemáticas, hasta que encuentre la información relacionada con el problema, pero si no encuentra la información, ese mismo razonamiento lo orienta a hacer ciencia para buscarla y descubrirla; de esta forma, llenará el vacío que tiene en los archivos. Este proceso se logra gracias a que la persona se ha formado en lógica y que ha desarrollado un razonamiento que le permite seguir o construir un camino mediante pasos cuidadosamente estructurados,y asegurándose de que cada uno se apoye firmemente en el conocimiento anterior (Eckerdal y Berglund, 2005). Las habilidades y los principios ingenieriles con los que se forma a los ingenieros se deben presentar a través de procesos lógicamente relacionados y no puede ser una cuestión de último momento; es decir, en la universidad, es un proceso integral que comienza desde la escuela y que se desarrolla a medida que el estudiante progresa en su formación. En la formación superior, se termina de estructurar a través de aplicaciones más sofisticadas, pero si el estudiante todavía no ha desarrollado esa capacidad, lo más seguro es que opte por abandonar la carrera y buscar otra en la que no sea tan evidente esa falencia (Gellatly, 1986). Esto se debe a que gran parte del trabajo de los ingenieros requiere cálculos y análisis, tareas que dependen ampliamente del razonamiento lógico, por lo tanto, estos profesionales deben ser lógicos para tener éxito.

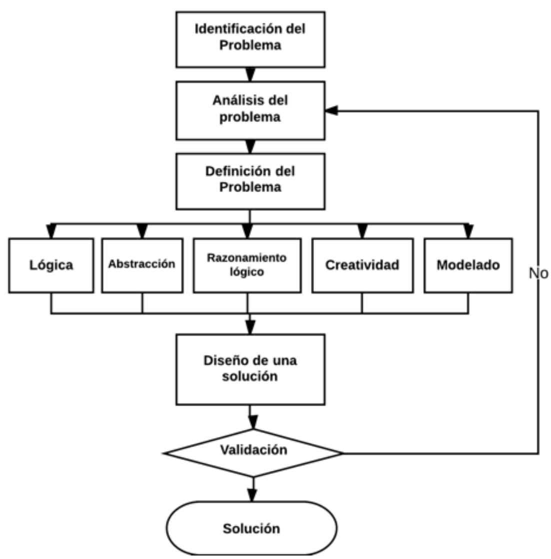


Figura 1.1: Capacidad creativa para solucionar problemas

El estudio y la práctica de las matemaáticas proporcionan al estudiante de ingeniería una serie de ventajas que van desde el marco exclusivo del pensamiento hasta el de las experiencias diarias y vitales. El dominio y el manejo de las ciencias matemáticas no solo son necesarios para ayudar a resolver las dificultades y problemas que la vida plantea de continuo, sino también son instrumentos fundamentales para el anaálisis y comprensión de las demás ramas del saber.[1]

[1] Tomado de Eleventh LACCEI Latin American and Caribbean Conference for Engineering and Technology (LACCEI'2013). "Innovation in Engineering, Technology and Education for Competitiveness and Prosperit" August 14-16, 2013 Cancun, Mexico. http://www.laccei.org/LACCEI2013-Cancun/RefereedPapers/RP221.pdf

1.2 Introducción a la lógica

Definición 1.1 *Proposición*
Una proposición es todo enunciado declarativo que está libre de ambigüedad y que tiene la propiedad de que es verdadero o falso, pero no ambos.

Si una proposición es verdadera se le asigna el *valor de verdad* (V) y si es falsa se le asigna el valor de verdad (F).
Así pues:
- Cada proposición debe tener el valor de verdad (V) ó el valor de verdad (F).
- Ninguna proposición debe tener ambos valores de verdad.
- Ninguna proposición podrá carecer de uno de dichos valores de verdad.

Las sentencias exclamativas, las interrogativas y las imperativas tales como:
- " ¡Viva la patria!"
- " ¿Está lloviendo? "
- " Oprima la tecla $<$ ENTER $>$ "

no son proposiciones, puesto que no pueden ser declaradas como verdaderas o falsas.

N Representamos las proposiciones por letras minúsculas p,vq,vr, s etc. y las llamaremos letras proposicionales. Cuando no se le dé un significado específico, cada letra proposicional representará una proposición arbitraria.

Una proposición p tiene un valor de verdad que es V o F pero no ambos a la vez. Todas las proposiciones matemáticas son de este tipo, es decir, toman uno de los valores V o F.

Ejemplo 1.1

Dados los siguientes enunciados:
i) 13 es un número primo
ii) $13 - 25 = 13$
iii) $x + 4 = 6$
iv) $\sqrt{16} = \pm 4$

Se infiere que (i), (ii) y (iv) son proposiciones, de donde sabemos que (i) y (iv) son verdaderas y (ii) es falsa. La expresión (iii) no es una proposición, puesto que no puede asignársele un valor de verdad.

Las proposiciones anteriores suelen llamarse *proposiciones simples*, pues no poseen términos de enlace o conectivos. Las p*roposiciones compuestas*son aquellas que se obtienen combinando proposiciones simples mediante términos de enlaces.

Ejemplo 1.2

Son proposiciones compuestas:
i) 2 es un número primo y 6 es un múltiplo de 3.
ii) Si un número es par, entonces, su cuadrado es un número par.

iii) $3+5=17$ ó $3^2=9$

Algunas proposiciones parecieran tener distintos valores de verdad según el caso. Por ejemplo, si decimos: " Hoy es sábado ", es falsa de domingo a viernes y es verdadera los sábado. Si decimos, " fue gol de Yepes " depende de qué partido nos estemos refiriendo. Esto se debe a que en nuestro lenguaje coloquial, hay una gran parte de la información que está implícita. La palabra *hoy* está indicando una fecha particular, aunque no se esté diciendo explícitamente cuál. Un titular en un periódico que diga " *Fue gol de Yepes* " se está refiriendo a un determinado partido.

1.2.1 Conectivos lógicos

Como se vio anteriormente, el cálculo proposicional suele utilizar letras minúsculas como p, q, r para simbolizar las proposiciones. Estos símbolos pueden modificarse o combinarse mediante conectivos lógicos dando lugar a proposiciones compuestas. Los conectivos lógicos que estudiaremos son:

- La conjunción: y $(\wedge)$
- la disyunción: o $(\vee)$
- El condicional: si.... entonces $(\rightarrow)$
- El bicondicional: si y solo si $(\longleftrightarrow)$
- La negación: no $(\sim)$

La negación modifica una proposición y por lo tanto, se dice que es $1-aria$ o unitaria. Los otros se aplican a dos proposiciones y se los llama $2-arios$ o binarios.

Los operadores *y*, *o*, *si...., entonces*, *si y solo si*, actúan sobre dos proposiciones a la vez y por tanto, son operadores binarios en tanto que el operador no actúa sobre solo una proposición. En todos estos casos, se obtienen proposiciones compuestas.

1.2.2 Esquemas proposicionales

Definición 1.2 ***Esquema proposicional***

Un esquema proposicional o fórmula es toda combinación de letras proposicionales y operadores.

Ejemplo 1.3

Son esquemas proposicionales:

i) $\sim p$

ii) p y q

iii) p o q

iv) si p entonces q

v) p si y solo si q

i) Se leerá: No p y para evitar distorsiones gramaticales, la leemos: No es el caso que p.

Ejemplo 1.4

Consideremos las proposiciones " p: 5 es un número entero positivo " y " q:$\sqrt{7}$" es un número racional . Algunas posibles combinaciones de p y q son:

- $\sim p$: 5 **no** es un número entero positivo.
- $p \wedge q$: 5 es un número entero positivo **y** $\sqrt{7}$ es un número racional.
- $\sim p \wedge q$: 5 **no** es un número entero positivo y $\sqrt{7}$ es un número racional.
- $p \vee q$: 5 es un número entero positivo **o** $\sqrt{7}$ es un número racional.
- $p \rightarrow q$: **Si** 5 es un número entero positivo **entonces** $\sqrt{7}$ es un número racional.
- $p \longleftrightarrow q$: 5 es un número entero positivo **si y solo si** $\sqrt{7}$ es un número racional.

El valor de verdad de una proposición compuesta depende del valor verdad de las proposiciones componentes:

Definición 1.3 ***Negación***

La negación es una operación unitaria que se aplica a una proposición y tiene el efecto de revertir el valor de verdad. Esto es, si p es verdadera entonces $\sim p$ es falsa y si p es falsa, entonces, $\sim p$ es verdadera. En ocasiones en vez de la virgulilla $(\sim)$, se utiliza el símbolo de negación $(\neg)$. Ver cuadro 1.1

p	$\sim p$
V	F
F	V

Cuadro 1.1: Tabla de verdad para la negación.

Ejemplo 1.5

De acuerdo con las proposiciones del ejemplo anterior, tenemos que "$\sim p$ es 5 **no** es un número entero positivo" y "$\sim q$:$\sqrt{7}$ **no** es un número racional".

Una tabla de este tipo, en la que se listan simultáneamente los valores de verdad de la proposición p y la que resulta de aplicar un conectivo se llama *tabla de verdad*.

Ejemplo 1.6

Tenemos la proposición " p: 10 es múltiplo de 5 ". Entonces, el valor de p es V . Su negación debe ser una proposición que es falsa siempre que p sea verdadera, por lo tanto $\sim p$ debe expresar exactamente lo contrario a lo que expresa p: " $\sim p$:10 no es múltiplo de 5 ".

Ejemplo 1.7

Consideremos la proposición:

$$\text{“ } q : \text{Todos los perros son blancos ”.}$$

No debe confundirse la negación con decir algo diferente, por ejemplo:

$$\text{“ } r : \text{Algunos perros son blancos ”.}$$

o con indicar la negación con:

$$\text{“ } t : \text{Todos perros son negros” .}$$

La proposición r no es la negación de q, puesto que si q es verdadera, también r lo es. La proposición t tampoco es la negación, porque la negación de ser blanco no es ser negro. Si decimos:

$$\text{“ } s : \text{Ningún perro es blanco ”.}$$

tampoco s es la negación de q, ya que si existiera un único perro de color blanco y los demás fueran marrones, entonces, tanto q como s serían proposiciones falsas. La negación de q puede ser enunciada de la siguiente manera:

$$\text{“ } \sim q : \text{Algunos perros no son blancos ”.}$$

Así, si q es verdadera, $\sim q$ es falsa; mientras que si $\sim q$ es verdadera, entonces, q es falsa. Ejemplo como este lo veremos con más detalle cuando se estudien los cuantificadores.

Definición 1.4 ***Conjunción*** $p \wedge q$

Sean p, q dos proposiciones, la proposición compuesta p y q $(p \wedge q)$ se llama la *conjunción* de p con q. Se define así: El valor de verdad de $p \wedge q$ es V si tanto p como q tienen valor V y caso contrario, cuando al menos una de ellas tiene valor F, entonces el valor de verdad de la conjunción es F. Esta información puede resumirse en el Cuadro 1.2.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Cuadro 1.2: Tabla de verdad para la conjunción.

Ejemplo 1.8

Sea " p: algunas aves vuelan" y "q:el cocodrilo es un pez", entonces, $p \wedge q$ expresa algunas aves vuelan y el cocodrilo es un pez. Por otra parte, la proposición $p \wedge \sim q$, que dice: " algunas aves vuelan y el cocodrilo **no** es un pez "; es verdadera dado que es la conjunción de dos proposiciones verdaderas.

Definición 1.5 ***Disyunción*** $p \vee q$

El valor de verdad de $p \vee q$ es V cuando una de las proposiciones p, q tiene valor V o ambas tienen valor V. Y tienen valor F, cuando tanto p como q tiene valor F. Dicho de otra manera, la disyunción $p \vee q$ de dos proposiciones p, q es V cuando al menos una de ellas tiene valor V. El Cuadro 1.3 nos muestra la tabla de verdad de la disyunción.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Cuadro 1.3: Tabla de verdad para la disyunción.

Definición 1.6 ***Condicional o implicación*** $p \rightarrow q$

Sea p y q dos proposiciones, la proposición compuesta " si p entonces q" se llama " la condicional de p con q " y se define mediante la tabla de verdad del Cuadro 1.4

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Cuadro 1.4: Tabla de verdad para el condicional.

De la tabla se deduce que la condicional $p \rightarrow q$ es falsa cuando p es V y q es F. En la condicional $p \rightarrow q$, p se llama *antecedente* y q *consecuente*. Para aclarar la tabla anterior consideramos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.9

Juan le dice a su esposa: " Si hago el negocio, entonces te compro una moto". Veamos las distintas posibilidades:

- Juan hace el negocio y le compra la moto a su esposa. En este caso, mantiene su promesa; por lo tanto, su proposición fue verdadera.
- Juan hace el negocio, pero no le compra la moto a su esposa. En este caso, rompió su promesa, por ende su proposición fue falsa.
- Juan no hace el negocio, pero a pesar de ello, le compra la moto a su esposa (no rompiendo su promesa); por tanto, su proposición fue verdadera.
- Juan no hace el negocio y no le compró la moto a su esposa; por tanto, no rompió su promesa y su proposición fue verdadera.

El valor de verdad $p \to q$ también queda determinado por el valor de la proposición $\sim p \vee q$.

N En una implicación $p \to q$, p es la ***condición suficiente*** para q y q es la ***condición necesaria*** para p. Es decir, es suficiente que ocurra p para que ocurra q, y necesariamente ocurrirá q si ocurre p. A diferencia de los otros conectivos, la tabla de verdad del condicional no guarda armonía con el uso que hacemos de este tipo de expresiones en el lenguaje natural. Por ejemplo, para el lenguaje cotidiano, la expresión: " Si llueve entonces Juan usa paraguas " pareciera que indica que si no llueve, entonces, Juan no usa paraguas. En otras palabras, no sería verdadera la proposición si el antecedente es falso y el consecuente verdadero. Sin embargo, para la lógica esto es verdadero.

N La implicación lógica $p \longrightarrow q$ se puede leer de forma equivalente como :

- p es una **condición suficiente** para q, pues es suficiente que p sea verdadera (o que lo que p afirma se cumpla), para que q también lo sea.
- q es una **condición necesaria** para p, pues cada vez que p se cumple (es verdadera), necesariamente q también se cumple.

Definición 1.7

Si $p \to q$ es una implicación, entonces

- $q \to p$ se llama implicación *recíproca*.
- $\sim p \to \sim q$ se llama implicación *inversa*.
- $\sim q \to \sim p$ se llama implicación *contrarrecíproca*.

Ejemplo 1.10

"Si usted es mayor de 30 años, entonces, usted puede ingerir licor"

En este caso, que alguien sea mayor de 30 años es suficiente información para concluir que esa persona puede ingerir licor. Por otra parte, poder ingerir licor es una condición necesaria para ser mayor de 30 años

Debemos notar que hay otras formas de expresar un condicional que no es necesariamente el " *si . . . entonces*" . Los siguientes ejemplos también son condicionales de la forma $p \to q$:

- Viajo en taxi si estoy atrasado, (p : " Estoy atrasado ", q : "Viajo en taxi").
- Solo si es sábado voy al cine, (p : " Voy al cine" , q : " Es sábado ").
- Es suficiente que llueva para que me quede en casa. (p :Llueva, q : " Me quedo en casa").

Definición 1.8 ***Bicondicional o doble implicación*** $p \longleftrightarrow q$

El bicondicional $p \longleftrightarrow q$ de dos proposiciones p, q es V si p y q tienen ambas el mismo valor de verdad.
El bicondicional $p \longleftrightarrow q$ puede pensarse también como la proposición compuesta:

$$(p \to q) \wedge (q \to p).$$

Este bicondicional se define mediante el Cuadro 1.5:

p	q	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Cuadro 1.5: Tabla de verdad para el bicondicional.

Definición 1.9 ***Proposiciones equivalentes***

Cuando dos proposiciones tienen el mismo valor de verdad, se dice que son equivalentes:

Ejemplo 1.11

Supongamos que para aprobar un parcial de álgebra la nota debe ser mayor que 4. Entonces, con las proposiciones simples:

- p: Apruebo un parcial,
- q: La nota es mayor que 4,

y el conectivo $\longleftrightarrow$ formamos la proposición compuesta

$$p \longleftrightarrow q\text{: Apruebo un parcial si y solo si la nota es mayor que 4}$$

Definición 1.10 ***Contingencia***

Una *contingencia* es una proposición compuesta que es verdadera o falsa según los posibles valores de verdad de las proposiciones componentes.

p	$\sim p$	$p \wedge (\sim p)$	$\sim [p \wedge (\sim p)]$
V	F	F	V
F	V	F	V

Cuadro 1.6: Solución del ejemplo 1.2.2.

Definición 1.11 ***Tautología***

Una *tautología* es una proposición compuesta que es verdadera para todos los posibles valores de verdad de las proposiciones componentes

Definición 1.12 ***Contradicción***

Una *contradicción* es una proposición compuesta que es falsa para todos los posibles valores de verdad de las proposiciones componentes.

Ejemplo 1.12

Construir la tabla de verdad para $\sim [p \wedge (\sim p)]$. Se toman como encabezamiento, p, $\sim p$, $p \wedge \sim p$ y $\sim [p \wedge (\sim p)]$. (ver Cuadro 1.6).

Como $\sim [p \wedge (\sim p)]$ es verdadera para todos los posibles valores de verdad de p, entonces, es una tautología.

1.3 Argumentos y demostraciones

En las futuras clases de álgebra, cálculo y otras materias de la carrera de ingeniería , veremos a menudo enunciados con el nombre de Teoremas, Lemas, Proposiciones, Corolarios, etc. Este tipo de enunciados afirman que dadas ciertas hipótesis, se cumple una conclusión. Estos enunciados no son decretos ni leyes, sino que deben ser demostrados, y la demostración prueba de los mismos hace uso de la lógica. Por ejemplo, si afirmamos que si un número es múltiplo de 4 entonces es múltiplo de 2, esto tiene como hipótesis que " *cierto número es múltiplo de* 4 ", y como conclusión que " *el es múltiplo de* 2 ".

Para demostrar que la conclusión es cierta, se suelen usar uno de los siguientes caminos: la demostración directa o la demostración indirecta. La demostración directa nos muestra que siempre que las hipótesis sean verdaderas se cumple que la conclusión lo es. Ejemplo, si un número n es múltiplo de 4, es porque $n = 4 \cdot k$, para cierto entero k. Pero, entonces $n = (2 \cdot 2) \cdot k$, y por la asociatividad del producto, resulta $n = 2 \cdot (2 \cdot k)$, es decir que n es múltiplo de 2.

En la demostración indirecta o demostración por el absurdo, se hace uso el hecho que la implicación $p \longrightarrow q$ es lógicamente equivalente a $\sim q \rightarrow \sim p$. Es decir, se demuestra que siempre que el consecuente es falso, también el antecedente lo es. Así, en nuestro ejemplo, deberíamos probar que si n **no** es múltiplo de 2, entonces, tampoco es múltiplo de 4. No es el objetivo de este curso aprender a probar o a demostrar, pero al menos dar una breve introducción sobre qué significa hacer la demostración o prueba de un teorema u otro enunciado, ya que muy pronto veremos muchos de estos casos y diversas formas de demostrar.

Por ejemplo, en los ejercicios y futuros exámenes, suelen aparecer preguntas del tipo: “determine si el siguiente enunciado es verdadero o falso. Justifique su respuesta dando una prueba o un contraejemplo, según corresponda ”. ¿Qué significa esto? Justificar dando una prueba significa dar una demostración directa o indirecta de lo que queremos probar; es decir, argumentar que a partir de las hipótesis y siguiendo un razonamiento lógico, se puede llegar a la conclusión, o bien, mostrar que si la conclusión no es cierta, entonces, alguna de las hipótesis no se cumple. En cambio, la justificación mediante un contraejemplo consiste en dar un ejemplo en el cual se cumplen las hipótesis, pero no se cumple la conclusión. Por ejemplo, ante la afirmación “ si un número es natural entonces es par ”, basta con notar que el número 3, que cumple con la hipótesis de ser natural, **no** es un número par. Este contraejemplo sirve para mostrar que la afirmación es falsa.

1.4 Combinación de proposiciones con conectivos lógicos

Utilizando los conectivos lógicos, estamos en condiciones de formar proposiciones compuestas. Si no tenemos el cuidado de hacer un uso adecuado de los paréntesis, podremos formar expresiones que son ambiguas e imposibles de interpretar. Ahora estamos en condiciones de evaluar el valor de verdad de cualquier proposición compuesta teniendo en cuenta los valores de verdad de las proposiciones que la componen y los conectivos lógicos.

Ejemplo 1.13

Dada la tabla de verdad para la proposición compuesta s definida por

$$s : (p \to q) \wedge [(q \wedge \sim r) \to (p \vee r)],$$

Se debe tener en cuenta que si se tienen n proposiciones entonces, se tendrán 2^n combinaciones posibles de valores de verdad para todas las proposiciones. En nuestro ejemplo, tendemos tres proposiciones (p,q,r), luego $n = 3$, entonces $2^3 = 8$

p	q	r	$p \to q$	$q \wedge \sim r$	$p \vee r$	$(q \wedge \sim r) \to (p \vee r)$	s
V	V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	F
V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V

1.5 Cuantificadores

1.5.1 Funciones Proposicionales

Consideremos las siguientes proposiciones:

q : El perro es un animal.
r : La rosa es un animal.
s : La vaca es un animal.

Las tres proposiciones tienen en común el predicado lingüístico “ es un animal” y tienen diferente el *sujeto*. La frase “es un animal” está dando una propiedad del sujeto. Si escribimos:

“ x es un animal ”,

obtenemos una oración que no es una proposición, dado que su valor de verdad dependerá del valor de x. Así, si a x le damos el valor x = “ El perro ”, obtenemos la proposición:

“ El perro es un animal ”,

que es verdadera, mientras que si a x le damos el valor x=“La rosa” obtenemos la proposición:

“La rosa es un animal”,

que es falsa. En este ejemplo, la frase “ x es un animal ” es una *función proposicional*, y la variable x toma valores en un conjunto llamado *universo del discurso* . Entonces, las funciones proposicionales no son proposiciones, pero para cada valor que le demos a x obtenemos una proposición. A las funciones proposicionales las denotamos con una letra mayúscula seguida de la variable entre paréntesis. Por ejemplo:

$P(x)$: x es un animal.

También podemos tener funciones proposicionales con más de una variable, por ejemplo

“ x es mayor que y” .

El valor de verdad en estos casos dependerá de los valores que tomen las variables x y y. Así, si $x = 0$ y $y = 3$, la proposición “ 0 es mayor que 3 ” es falsa, mi entras que si $x = 4$ e $y = \pi$, la proposición “ 4 es mayor que π ” es verdadera.

1.5.2 Cuantificadores

Los cuantificadores nos permiten construir proposiciones a partir de funciones proposicionales ya sea particularizando o generalizando. Ejemplifiquemos esto. Si consideramos la función proposicional

$P(x)$: x es mayor que 0,

podemos particularizar esto diciendo:

“Existe un número real que es mayor que 0”

o generalizarlo, diciendo:

"Todos los números reales son mayores que 0".

Notemos que tanto en la particularización como en la generalización, se especifica un conjunto en donde toma valores la variable; en este ejemplo, el conjunto son los números reales. Existe una notación específica para la particularización y la generalización:

$$\exists x \in \mathbb{R} | x > 0,$$

que se lee "existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que x es mayor que 0"; mientras que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$$

se lee "para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que x es mayor que 0".

El símbolo $\forall$ *se llama* ***cuantificador universal***
y el símbolo $\exists$ *es el* ***cuantificador existencial***.

Ejemplo 1.14

Consideremos la función proposicional

$$P(x) : 2x \text{ es par},$$

Entonces, la proposición:

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n);$$

es decir, "*para todo n natural se cumple que* $2 \cdot n$ *es par*" es equivalente a enunciar:

$$2 \cdot 1 \text{ es par y } 2 \cdot 2 \text{ es par y } 2 \cdot 3 \text{ es par y } 2 \cdot 4 \text{ es par}$$

Por lo tanto, esta proposición será verdadera si todas las proposiciones $P(n)$ son verdaderas y será falsa si al menos una de ellas es falsa.

1.5.3 Negación de cuantificadores

La negación de una proposición cuantificada es también una proposición, que, a su vez puede describirse con un cuantificador. La proposición $p : (\forall x) P(x)$ es verdadera si y solo si $P(x)$ es verdadera para todo x. Su negación es una proposición falsa siempre que p sea verdadera y verdadera siempre que p sea falsa.

Luego $\sim p$ es la proposición verdadera si $P(x)$ es falsa para algún valor de x; y es falsa si $P(x)$ es verdadera para todos los valores de x. Dicho de otro modo, es verdadera si $\sim P(x)$ es verdadera para algún valor de x, es falsa si $\sim P(x)$ es falsa para todos los valores de x. Entonces:

$$\sim (\forall x, P(x)) \equiv \exists | \sim P(x).$$

Por ejemplo, la negación de la proposición "Todos los números son positivos" es: existe un número que no es positivo.

Análogamente, la negación de la proposición $\exists x | P(x)$ será verdadera si y solo si $P(x)$ es falsa para todo x y falsa, si $P(x)$ es verdadera para algún x. Equivalentemente, $\sim (\exists x | P(x))$ es verdadera si $\sim P(x)$ es verdadera para todo x y es falsa si $\sim P(x)$ es falsa para algún x. Luego:

$$\sim (\exists x | P(x)) \equiv \forall x, \sim P(x).$$

Ejemplo 1.15

La negación de la proposición "*Existe un número que es primo*" es la proposición: "*Todos los números cumplen que no son primos*", o lo que coloquialmente es equivalente a: "*Ningún número es primo*".

Ejemplo 1.16

Dada la función proposicional:

$$\forall x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 0,$$

Es verdadera para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$. La negación de esta es:

$$\exists x \in \mathbb{R} \mid x^2 \ngeq 0,$$

que es falsa para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.17

Dada la función proposicional:

$$\exists x \in \mathbb{R} \mid 2x + 5 = 1,$$

su negación es

$$\forall x \in \mathbb{R} \mid 2x + 5 \neq 1.$$

Ejercicios 1.1

1. Elaborar la tabla de verdad para $\sim p \vee q$.
2. Realizar las tablas de verdad para la recíproca, la inversa y la contrarrecíproca. Observar que los valores de verdad de una implicación y su contrarecíproca son los mismos, es decir, son *lógicamente equivalentes*.

3. Sean p, q, r las proposiciones siguientes:p: está lloviendo, q: el sol está brillando, r: hay nubes en el cielo; traduzca lo siguiente a notación lógica, utilizando p, q, r y conectivos lógicos.
   a) Está lloviendo y el sol está brillando.
   b) Si está lloviendo, entonces hay nubes en el cielo.
   c) Si no está lloviendo, entonces, el sol no está brillando y hay nubes en el cielo.
   d) El sol está brillando si y solo si no está lloviendo.
   e) Si no hay nubes en el cielo, entonces, el sol está brillando.
4. Sean p, q y r como en el ejercicio anterior, traduzca lo siguiente a oraciones en español.
   a) $(p \wedge q) \rightarrow r$
   b) $\sim (p \longleftrightarrow (q \vee r))$
   c) $(p \rightarrow r) \rightarrow q$
   d) $\sim (p \longleftrightarrow (q \vee r))$
   e) $\sim (p \vee q) \wedge r$
   f) $(\sim r \wedge \sim p \vee \sim q)$
   g) $\sim r \longleftrightarrow (p \rightarrow q)$
5. Supongamos que todos los días que llueve Juan usa paraguas. ¿Cuál de las siguientes proposiciones puedes asegurar que son verdaderas y cuáles no puedes asegurar?
   a) Si llueve, entonces Juan usa paraguas.
   b) Si Juan usa paraguas, entonces llueve.
   c) Si Juan no usa paraguas, entonces no llueve.
   d) Si no llueve, entonces Juan no usa paraguas.
   e) Si no llueve, entonces Juan usa paraguas.
6. Escriba la recíproca, la contrarrecíproca y la inversa de cada una de las siguientes implicaciones:
   a) Si n es negativo, entonces $n-1$ es negativo.
   b) Si $2+4=6$, entonces $2+4<7$.
   c) Si 6 es un número par, entonces $4>0$.
   d) Si $5+5=10$, entonces $10+5=15$.
7. Determine los valores de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:
   a) Si $2+2=4$, entonces $2+4=8$.
   b) Si $2+2=5$, entonces $2+4=8$.
   c) Si $2+2=4$, entonces $2+4=6$.
   d) Si $2+2=5$, entonces $2+4=6$.
8. Si $p \rightarrow q$ es falso, indique los valores de verdad para:
   a) $p \wedge q$
   b) $p \vee q$
   c) $q \rightarrow p$
9. Sabiendo que la proposición compuesta $(\sim q) \vee (q \rightarrow p)$ es falsa, indique cuál es el valor de verdad de las proposiciones p y q.
10. Para las siguientes proposiciones compuestas, elabore las tablas de verdad correspondientes:
   a) $\sim (p \wedge q)$
   b) $\sim (p \vee q)$

c) $(p \to q) \to [(p\vee \sim q) \to (p \wedge q)]$
d) $[(p \vee q) \wedge r] \to (p\wedge \sim q)$
e) $[(p \longleftrightarrow q) \vee (p \to r)] \to (\sim q \wedge p)$
f) $\sim (p \wedge q) \vee (r\wedge \sim p)$
g) $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (p\vee \sim q) \wedge (\sim p\vee \sim q)$

11. Para cada una de las siguientes proposiciones, analice el valor de verdad de las mismas y escriba, en forma simbólica, su negación. Asuma que las variables toman valores en el conjunto de los números reales.
    a) $\exists x, 3x-2=-4x+1$
    b) $\forall x, 3x-2 \neq -4x+1$
    c) $\exists x | x^2+x+1=0$
    d) $\exists x | x^2+1>0$
    e) $\forall x, x^2+3x+2=0$
    f) $\forall x, (\exists y | x^2+y^2=(x+y)^2)$
    g) $\exists x \in \mathbb{R} | x^2+x=2$
    h) $\exists x \in \mathbb{R}, \frac{9}{8} < x < \frac{5}{4}$
    i) $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq \frac{3}{2}$ ó $x \geq \frac{8}{5}$
12. Escriba las siguientes frases con notación lógica y escriba también sus negaciones. Cuando use cuantificadores especifique los universos, utilice $\mathbb{R}$ si no se especifica ningún universo:
    a) Para toda $x>0$, existe n en $\mathbb{N}$ tal que $n>x$ y $x>\frac{1}{n}$.
    b) Para toda $m,n \in \mathbb{N}$, existe p en $\mathbb{N}$ tal que $m<p$ y $p<n$.
    c) Existe $u \in \mathbb{N}$ tal que $un=n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
    d) Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m<n$.
    e) Para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^m \leq n$ y $n < 2^{m+1}$.

Las preguntas 13 a la 31 son de selección múltiple con única respuesta (TIPO I). Este tipo de preguntas consta de un enunciado y cuatro opciones de respuesta identificadas con las letras a,b,c,d. Lea detenidamente cada pregunta y seleccione la correcta.

13. De la siguientes proposiciones compuestas indique cual es falsa:
    a) Si $A=\{x | x \in \mathbb{Q} \wedge x \notin \mathbb{Z}\}$ y $B=\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{5},-\frac{6}{7},5,-8\right\}$ entonces $A \subseteq B$.
    b) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} \ni x<y$.
    c) $\forall m,n \in \mathbb{N}, m^n=n^m \to 3^2=2^3$.
    d) Si $10=2+2+2+2+2=2\cdot 5$ entonces $10=5+5=5\cdot 2$.
14. Si decimos que la proposición "*Si Pedro tiene carro entonces el trabajo de Pedro esta retirado de su casa*", es falsa, entonces, tenemos que:
    a) Pedro tiene carro carece de cualquier valor de verdad.
    b) El trabajo de Pedro esta retirado de su casa es una proposición verdadera y Pedro tiene carro es una proposicíon falsa.
    c) El trabajo de Pedro esta retirado de su casa es una proposición falsa y Pedro tiene carro es una proposicíon verdadera.
    d) El trabajo de Pedro esta retirado de su casa es una proposición verdadera.

15. Si p es una proposición falsa, indique cuál de las siguientes proposiciones es una propoción falsa:
    a) $p \wedge \neg p$.
    b) $p \vee \neg p$.
    c) $p \rightarrow \neg p$.
    d) $\neg p$.
16. De la proposición $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x < y, \exists z \in \mathbb{Q} \ni x < z < y$ podemos decir que:
    a) es falsa y su negación es $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \not< y, \exists z \in \mathbb{Q} \ni x \not< z \not< y$
    b) es verdadera y su negación es $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \not< y, \exists z \in \mathbb{Q} \ni x \not< z \not< y$
    c) es falsa y su negación es $\exists x, y \in \mathbb{Z}, x < y, \forall z \in \mathbb{Q} \ni x \geq z \geq y$
    d) es verdadera y su negación es $\exists x, y \in \mathbb{Z}, x < y, \forall z \in \mathbb{Q} \ni x \geq z \geq y$
17. Dada la función proposicional $P(x, y) : x > y^2$, tenemos que :
    a) $P(0, 1)$ es falsa.
    b) $P(0, 1)$ es verdadera.
    c) $P(1, 1)$ es verdadera.
    d) $P(1, 0)$ es falsa.
18. Para construir la tabla de verdad de la proposición compuesta $(p \rightarrow q) \wedge [(q \wedge \sim r) \rightarrow (p \vee r)]$ debemos calcular en forma ordenada:
    a) $(p \rightarrow q) \wedge [(q \wedge \sim r) \rightarrow (p \vee r)]$
    b) $p \rightarrow q$, $q \wedge \sim r$ y finalmente, $p \vee r$
    c) $p \rightarrow q$, $q \wedge \sim r$, $p \vee r$, $(q \wedge \sim r) \rightarrow (p \vee r)$ y finalmente, $(p \rightarrow q) \wedge [(q \wedge \sim r) \rightarrow (p \vee r)]$
    d) $\sim r$, $p \rightarrow q$, $q \wedge \sim r$, $p \vee r$, $(q \wedge \sim r) \rightarrow (p \vee r)$ y finalmente, $(p \rightarrow q) \wedge [(q \wedge \sim r) \rightarrow (p \vee r$
19. "Si tengo evaluación de matemática, entonces me pondré a estudiar todo el fin de semana" quiere decir que:
    a) estudiar todo el fin de semana es condición necesaria para tener evaluación de matemática.
    b) estudiar todo el fin de semana es condición suficiente para tener evaluación de matemática.
    c) estudiar todo el fin de semana es condición necesaria y suficiente para tener evaluación de matemática.
    d) tener no evaluación de matemática es condición suficiente para no estudiar todo el fin de semana.
20. "Si no gano el examen, entonces fue porque no estudie" equivale a decir que:
    a) si gané el examen, entonces estudie.
    b) si estudié, entonces gané el examen.
    c) si no estudié, entonces no gané el examen.
    d) si pierdo el examen, entonces no estudié.
21. La proposición $p \rightarrow q$ es una
    a) Tautología.
    b) Falacia.
    c) Contradicción.
    d) Contingencia.
22. Dado $p \longleftrightarrow q$, podemos decir que:

a) p es una condición suficiente y necesaria de q
b) p es una condición suficiente de q.
c) q es una condición suficiente de p.
d) p no es una condición suficiente, ni necesaria de q.

23. Pedro dice: "*Si tengo sueño, entonces me acuesto temprano*". Dado que Pedro no se acostó temprano, podemos inferir que
a) Pedro tiene sueño.
b) si Pedro se acuesta temprano, entonces Pedro tiene sueño.
c) Pedro no tiene sueño.
d) no es cierto que Pedro no tiene sueño.

24. Pedro dice: "*Si tengo sueño entonces me acuesto temprano*". Si Pedro no tiene sueño, podemos decir que:
a) Pedro no se acuesta temprano.
b) no es cierto que pedro no se acuesta temprano.
c) no podemos concluir nada.
d) Pedro se contradice en lo que dice.

25. Luis dice a su novia María "*si no vamos al cine entonces vemos una película de terror en mi casa o jugamos monopolio en la tuya*" y le afirma, ya sabes: "*si te quedas a dormir en mi casa o me quedo a dormir en la tuya entonces no vamos al cine*". Si María se queda a dormir en la casa de Luis, podemos concluir que:
a) María no se quedo en casa de Luis o Luis no se quedó en casa de María.
b) fueron al cine.
c) no fueron al cine.
d) vieron una película de terror en casa de Luis o jugaron monopolio en casa de María.

26. Si $p : 5+x = 3x-1$, entonces $\backsim p$ está dada por
a) $x = 3$.
b) $5+x \neq 3x-1$. Para todo x.
c) $5+x \neq 3x-1$. Para algún x.
d) $\backsim (5+x \neq 3x-1)$.

27. Al construir la tabla de verdad para $\sim [p \wedge (\sim p)]$, encontramos que
a) es una falacia o contradición porque es falsa para todos los posibles valores de verdad de p.
b) es una tautología porque es verdadera para todos los posibles valores de verdad de p.
c) es una proposición simple porque no incluye conectores lógicos .
d) no se puede indicar cual es su valor de verdad.

28. "Si tengo evaluación de Matemática, entonces, me pondré a estudiar todo el fin de semana", quiere decir que:
a) estudiar todo el fin de semana es condición necesaria para tener evaluación de Matemática.
b) estudiar todo el fin de semana es condición suficiente para tener evaluación de Matemática.
c) estudiar todo el fin de semana es condición necesaria y suficiente para tener evaluación de Matemática.

   d) no tener evaluación de matemática es condición suficiente para no estudiar todo el fin de semana.

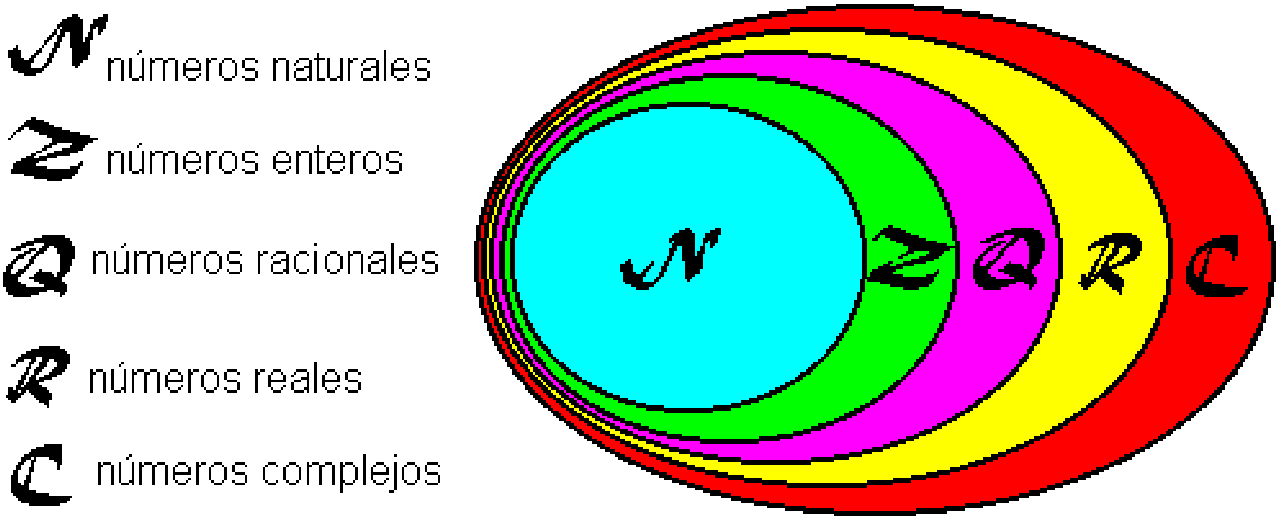
29. Enrique le dice a su hermano Carlos, “adivina cuál de estas opciones me ocurrió: *aprobé la evaluación de lógica o llegué tarde a clases*”. Carlos, de una vez felicita a Enrique por haber ganado la evaluación de Lógica. Carlos sabe que Enrique ganó la evaluación porque:
   a) él sabe que Enrique llegó temprano a clases .
   b) él sabe que Enrique llegó tarde a clases.
   c) él sabia que Enrique llegó tarde, entonces, ganar el examen o llegar tarde es siempre verdad.
   d) él sabia que llegó temprano, entonces, llegar temprano y ganar el examen es siempre verdad.

30. Dados los siguientes enunciados:
   i) 13 es un número primo,
   ii) $13-25=13$,
   iii) $x+4=6$,
   iv) $\sqrt{16}=4$,
   Podemos decir que **NO** es proposición:
   a) *i*
   b) *ii*
   c) *iii*
   d) *iv*

31. Consideremos la función proposicional

$$I(x) : 2x+1 \text{ es impar,}$$

   Entonces la proposición $\forall x \in \mathbb{N}, I(n)$ significa
   a) para todo n natural, se cumple que $2 \cdot n$ es par.
   b) para todo n natural, se cumple que $2 \cdot n$ es impar.
   c) para todo n natural, se cumple que $2 \cdot n+1$ es par.
   d) para todo n natural, se cumple que $2 \cdot n+1$ es impar.



2. TEORÍA DE CONJUNTOS

2.1 Teoría general de conjuntos

De la teoría de conjuntos, como estructura lógica, se deriva gran parte de la conceptualización matemática; es así como los conjuntos permiten construir y sistematizar como lenguaje específico: conceptos, definiciones, propiedades y teoremas, que facilitan el análisis y la capacidad de comprensión de la gran mayoría de los eventos matemáticos, aun en los temas más avanzados del cálculo, la teoría de probabilidades y las matemáticas modernas entre otras.

Entrando en materia podemos decir que cualquier colección de objetos o individuos se denomina conjunto. En el contexto de la matemática, el término *conjunto* no tiene una definición sino que es un concepto primitivo. Ejemplos de conjuntos son el conjunto de los números naturales, de los televisores de la ciudad de Cartagena y de los peces en los océanos. Nuestro objetivo será estudiar aquellos conjuntos que estén relacionados con el campo de la matemáticas, especialmente los conjuntos numéros.

Definición 2.1 ***Conjunto - Definición Intuitiva.***
Un conjunto es una colección bien definida de objetos, llamados elementos. Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas del alfabeto A,B,C,D. Los elementos que hacen parte es estos se identifican con letras minúsculas

Ejemplo 2.1

.

- $N=\{1,2,3,4\}$.
- $A=\{a,b,c,d,....,x,y,z\}$.
- T=El conjunto formado por todos los estudiantes de primer semestre de la Fundación Universitaria Tecnológico Comfenalco.

- El conjunto de todas las rectas que pasan por un punto P.

Algunos conjuntos en matemáticas son de tanta frecuencia y son tan importantes, que han recibido un nombre especial; nombremos unos cuantos:

- $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,...\}$ El conjunto de los números Naturales.
- $\mathbb{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ El conjunto de los números Enteros.
- $\mathbb{Z}^+ = \{1,2,3,...\}$ El conjunto de los números Enteros Positivos.
- $\mathbb{Z}^- = \{...,-3,-2,-1\}$ El conjunto de los números Enteros Negativos.

Definición 2.2 *Conjunto vacío*

Un conjunto sin elementos se denomina *conjunto vacío* y se representa con $\emptyset$ o $\{\}$.

Ejemplo 2.2

$\emptyset = \{x \in \mathbb{Z}^+ | x = -1 \wedge x = -4\}$.

Definición 2.3 *Conjunto universal*

También se le denomina *conjunto de referencia* o *conjunto de todos los conjuntos*. Es un conjunto del cual se pueden derivar otros conjuntos. Matemáticamente se denota por la letra mayúscula U.

Definición 2.4 *Pertenencia*

Si a es un elemento de un conjunto A, se escribe $a \in A$ y se lee *a pertenece a A* o *a es un elemento de A*. Si a no es un elemento del conjunto A, se escribe $a \notin A$ y se lee *a no pertenece a A* o *a no es elemento de A*.

Ejemplo 2.3

Teniendo en cuenta los conjuntos del ejemplo 2.1

- $4 \in N$.
- $c \in A$.
- $5 \notin A$.
- $7 \notin N$.

N Para nombrar un conjunto, se usan dos formas básicas:

- **Extensión**: es decir listando todos los elementos del conjunto separados por comas y encerrando todo entre llaves.
- **Comprensión**: enunciando una propiedad de los elementos que lo integran.

Ejemplo 2.4

- $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ está nombrado por extensión.
- $A = \{x|x$ es uno de los diez primeros números naturales$\}$ está nombrado por comprensión.
- $U = \{a,e,i,o,u\}$ está nombrado por extensión.
- $U = \{x|x$ es una vocal$\}$ esta nombrado por comprensión.
- $M = \{Perro, gato, loro\}$ está nombrado por extension.
- $A = \{x|x$ cumple la propiedad $P\}$ está nombrado por comprensión.
- $M = \{x \in \mathbb{R}|x^2 - 3x + 2 \leqslant 0\}$; esta nombrado por comprensión

Definición 2.5 ***Diagrama de Venn***

Los diagramas de Venn son esquemas usados en la teoría de conjuntos, tema de interés en matemática, lógica de clases y razonamiento diagramático. Estos diagramas muestran colecciones (conjuntos) de cosas (elementos) por medio de líneas cerradas. La línea cerrada exterior abarca a todos los elementos bajo consideración, el conjunto universal U. (Ver figura 2.1)

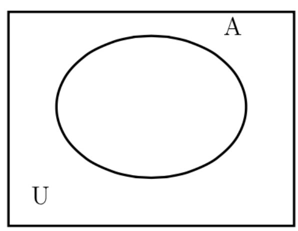


Figura 2.1: Conjunto U universal.

Definición 2.6 ***Subconjunto***

Un conjunto A es un subconjunto del conjunto B si todo elemento de A es también elemento de B. (Ver figura 2.2).

Se denota $A \subseteq B$ y se dice que A está *incluido o contenido* en B; es decir:

$$A \subseteq B \longleftrightarrow \forall x \in A \rightarrow x \in B.$$

N Sea A un conjunto cualquiera, entonces, $A \subseteq A$, $\varnothing \subset A$.

Ejemplo 2.5

Sea $A = \{a,e,i,o,u\}$, $B = \{a,i,u\}$, $C = \{i\}$, entonces:

$$B \subseteq A \text{ y } C \subseteq B \subseteq A$$

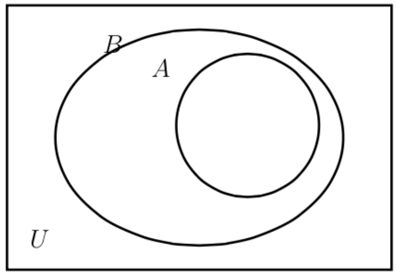


Figura 2.2: $A \subseteq B$

Ejemplo 2.6

- $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}^- \subset \mathbb{Z}$

Definición 2.7 ***Conjunto potencia o el conjunto de partes***

Si A es un conjunto, el *conjunto potencia de* A o *conjunto de partes de* A es aquel cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. Simbólicamente, se escribe como 2^A ó $\wp(A)$. El conjunto potencia $\wp(A)$ tiene 2^n elementos, siendo n el número de elementos de A. Es decir:

$$\wp(A) = \{B | B \subseteq A\}$$

Ejemplo 2.7

Sea $A = \{p, q, r\}$, entonces, $n = 3$, de aquí que el número de elementos de $\wp(A)$ es $2^3 = 8$. Ahora

$$\wp(A) = \{\varnothing, \{p\}, \{q\}, \{r\}, \{p, q\}, \{p, r\}, \{q, r\}, A\}$$

Ejemplo 2.8

Sea $M = \{x\}$ entonces $n = 1$, luego el número de elementos de $\wp(M)$ es $2^1 = 2$. Ahora

$$\wp(M) = \{\varnothing, \{x\}\} = \{\varnothing, M\}$$

Definición 2.8 Conjuntos Iguales

Dos conjuntos A y B son iguales si los elementos de A son elementos de B, y viceversa. Es decir, si $A \subseteq B$ y también $B \subseteq A$; esto es:

$$A = B \longleftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

o lo que es lo mismo:

$$A = B \longleftrightarrow (\forall x \in A \to x \in B) \land (\forall x \in B \to x \in A)$$

Definición 2.9 ***Conjuntos distintos***

Dos conjuntos A y B son distintos si no son iguales. Es decir, A y B son distintos si y solo si $\exists x \in A \land x \notin B$.

Definición 2.10 ***Conjuntos disjuntos***

Dos conjuntos A y B se dicen disjuntos si no tienen ningún elemento en común, esto es:

$$\forall x \in A \to x \notin B$$

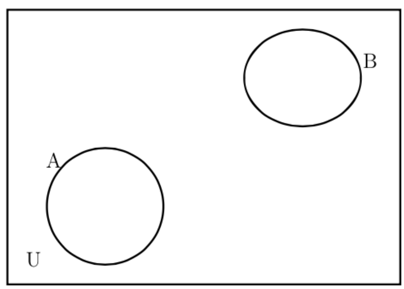


Figura 2.3: A y B son disjuntos.

Ejemplo 2.9

Los conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{5,6,7,8,9\}$ son disjuntos.

Si A es un subconjunto de B, pero distinto de B, se dice que A *es un subconjunto propio de* B. La notación $A \subseteq B$ es correcta, pero si queremos resaltar que A y B son distintos, escribimos $A \subset B$ o $A \subsetneq B$

Ejemplo 2.10

Sea $A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ es par } \land x < 10\}$, $B = \{2,4,6,8,10\}$. es decir, todo elemento de A es elemento de B, en escritura preposicional $\forall x \in A \to x \in B$, y de esto, concluimos que $A \subseteq B$ (A *es subconjunto de* B). Pero observemos que $10 \in B$, No obstante, $10 \notin A$; con lo cual, A y B no son los mismos conjuntos.

Definición 2.11 ***Cardinalidad***

Si un conjunto A tiene una cantidad finita de elementos, diremos que es un *conjunto finito* y llamaremos *cardinal de* A al *número de elementos de* A. El cardinal del conjunto vacío es 0 y si el conjunto tiene una cantidad no finita de elementos, diremos que es un *conjunto infinito* y que su cardinal es infinito. En todos los casos, el cardinal del conjunto A se denota por $|A|$, $n(A)$ o también $\sharp A$.

Ejemplo 2.11

- Si $A = \{a, b, c, 7, 11\}$, entonces $|A| = 5$.
- Si $B = \{n | n \in \mathbb{N} \wedge n^2 = 2\}$,entonces $|B| = 0$.
- Si $C = \{a, a, b, \}$, entonces, $|C| = 2$.
- $|\mathbb{Z}|$ es infinito.
- Si un conjunto A tiene n elementos, entonces, $|\wp(\mathbb{A})| = 2^n$.
- $|\wp(\mathbb{N})|$ es infinito.
- $|\wp(\varnothing)| = 1$.

2.2 Operaciones entre conjuntos

Existen operaciones entre conjuntos; el resultado de una operación entre conjuntos es a su vez un conjunto. Sea U el conjunto Universal y consideremos las partes de U. Entre estos están definidas operaciones como *complemento, unión, intersección y diferencia*.

Definición 2.12 ***Unión de conjuntos***
Sean A y B dos conjuntos. La unión de A con B; $A \cup B$ es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A o pertenecen a B; esto es:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

En un diagrama de Venn de la figura 2.4, representamos la unión de dos conjuntos sombreando el área que cubren ambos conjuntos.

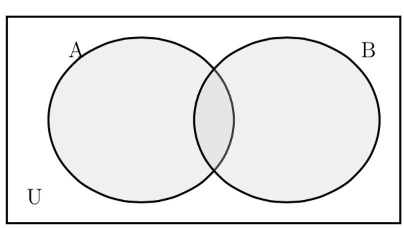


Figura 2.4: $A \cup B$.

Ejemplo 2.12

- Sea $P = \{0,2,4,6,8,10\}$ y $I = \{1,3,5,7,9\}$, entonces $P \cup M = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
- Sea $A = \{a,i,o\}$ y $B = \{i,o,u\}$ entonces, $A \cup B = \{a,i,o,u\}$.

N Sea A un conjunto cualquiera, entonces, tenemos que $A \cup \varnothing = A$ y $A \cup A = A$.

Ejemplo 2.13

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$

Definición 2.13 ***Número racional***

El conjunto de los números racionales, denotado con el símbolo $\mathbb{Q}$, consta de los números de la forma $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros y n es distinto de cero; es decir:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &= \left\{\frac{m}{n} | m,n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0\right\} \\ &= \left\{\frac{2}{5}, \frac{6}{13}, -\frac{15}{4}, \ldots\right\} \end{aligned}$$

Ya que $\forall x \in \mathbb{Z}, x = \frac{x}{1} \in \mathbb{Q}$, podemos decir que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Los números racionales tienen una representacion decimal o decimal periódica infinita; según el caso, por ejemplo $\frac{1}{2} = 0,5$, decimal finito; $\frac{5}{3} = 1,66666.. = 1,\widehat{6}$ decimal periódico infinito.

Definición 2.14 ***Número irracional***

El conjunto de los números irracionales esta formado por los números que no se pueden expresar como números racionales, en otras palabras no existe una representacion como decimal finito ni como decimal periódico infinito; su representacion es decimal infinita (no periódica). Esto es:

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \left\{x | x \neq \frac{m}{n}. \forall m,n \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{\pi = 3,1415926535\ldots, e = 2{,}7182818284\ldots, \frac{\pi}{5}, -e, \ldots\right\} \end{aligned}$$

Definición 2.15 ***Número reales***

El conjunto de los números racionales unido al conjunto de los números irracionales forman el conjunto de los números reales y se representa con $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Definición 2.16 ***Intersección de conjuntos***

Sean A y B dos conjuntos. La intersección entre A y B, $A \cap B$; es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A y pertenecen a B:

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

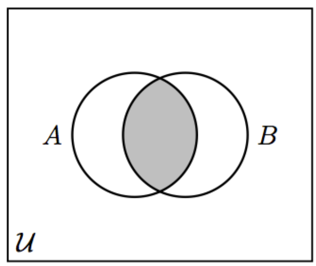


Figura 2.5: Intersección de conjuntos.

Ejemplo 2.14

Sea $S = \{n | n < 15\}$, $P = \{n | n \text{ es par}\}$ y $I = \{n | n \text{ es impar}\}$, entonces:

- $S \cap P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$
- $S \cap I = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$
- $P \cap I = \varnothing$

Definición 2.17 ***Conjuntos disjuntos***

Dos conjuntos A y B son disjuntos si y solo si $A \cap B = \varnothing$.

Ejemplo 2.15

$\mathbb{Z}^+$ y $\mathbb{Z}^-$ son disyuntos ya que $\emptyset = \mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{Z}^-$

Definición 2.18 ***Complemento de un conjunto***

Sea A un conjunto cualquiera, su *complemento* es el conjunto formado por los elementos que le faltan a ese conjunto, para ser igual al universal; es decir, los elementos que no están en A. El *complemento* del conjunto A se denota como A^c ó A'; esto es:

$$A^c = \{x|x \in U \wedge x \notin A\}$$

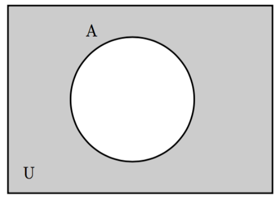


Figura 2.6: Complemento del conjunto $A = A^c$.

Ejemplo 2.16

Sea el conjunto Universal $U = \mathbb{N}$ y sea $P = \{x|x \text{ es par}\}$, entonces, $P^c = \{x|x \text{ es impar}\}$.

Definición 2.19 ***Diferencia entre conjuntos.***

Sean A y B conjuntos, entonces, la diferencia o complemento relativo entre A y B: $A-B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B:

$$A - B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}$$

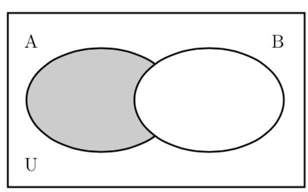


Figura 2.7: Diferencia entre conjuntos: $A-B$

Notar que si U es el conjunto universal, entonces, $A^c = U - A$.

Ejemplo 2.17

Sea $A = \{a,e,i,o,u\}$ y $B = \{1,2,a,e,i\}$, entonces, $A-B = \{o,u\}$.

2.2.1 Propiedades de las operaciones

Propiedad conmutativa.

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Propiedad asociativa.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Propiedad dristributiva.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Ley de Morgan.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

2.3 Silogismos categóricos

Veamos ahora un tipo de razonamiento muy sencillo conocido como *silogismo categórico*, en donde usaremos las propiedades de los conjuntos.

Definición 2.20 ***Silogismo***

Un silogismo es una forma de razonamiento de tipo deductivo (la deducción es el método lógico que lleva desde lo universal hasta lo particular) que consta de dos proposiciones como premisas y otra como conclusión.

Definición 2.21 ***Proposición categórica***

Una proposición categórica o declaración categórica es una proposición que afirma o niega que alguno o todos los miembros de una categoría están incluidos en otra.

Definición 2.22 Silogismo categórico

Un silogismo categórico o silogismo clásico es un silogismo compuesto por exactamente tres proposiciones categóricas (dos premisas y una conclusión).

Ejemplo 2.18

Dadas las dos proposiciones:

1) "Todos los hombres son mortale",
2) "Sócrates es hombr",

Podemos concluir que:

3 "Sócrates es mortal".

En efecto, sea M el conjunto de todos los mortales, $M = \{x|x \text{ es un mortal}\}$, $H = \{x|x \text{ es un hombre}\}$ y $s =$ Sócrates. El anterior silogismo puede ser expresado usando cuantificadores y notación de conjuntos de la siguiente manera:

1) $\forall x(x \in H \to x \in M)$
2) $s \in H$

Conclusión: $s \in M$.
Lo primero que debemos notar es que este razonamiento es válido independientemente del lo que representen las variables H, M y s. Por ejemplo, el siguiente razonamiento también es válido.

1) "Todos los burros son trabajadores".
2) "Platero es un Burro".

Conclusión:

3) "Platero es trabajador".

Ejemplo 2.19

Proposiciones:

1) "Todos los perros son animales".
2) "Algunos perros son equilibristas".

Conclusión:

3 "Algunos animales son equilibristas".

En efecto; Sea P el conjunto de todos los perros; A, el conjunto de todos los animales y E, el conjunto de los seres vivos que son equilibristas.

1) $\forall x(x \in P \rightarrow x \in A)$.
2) $\exists(x \in P \wedge x \in E)$.

Conclusión: $\exists x(x \in A \wedge x \in E)$.

Ejemplo 2.20

Proposiciones

1) "Algunos profesores son personas atléticas".
2) "Ningún profesor desprecia el estudio".

Conclusión:

3 "Algunas personas que aprecian el estudio son atléticas".

Denotemos por P al conjunto de los profesores; por A, al de las personas atléticas y por E, al de las personas que aprecian el estudio. Entonces, el silogismo anterior tiene la siguiente forma:

1) $\exists x(x \in P \wedge x \in A)$.
2) $\nexists(x \in P \wedge x \notin E)$.

Conclusión:

3) $\exists x(x \in E \wedge x \in A)$.

Ejemplo 2.21

Proposiciones:

1) "Todos los venados son mamíferos".

2) "Algunos animales acuáticos son mamiferos".
Conclusión:
3 "Algunos venados son animales acuáticos".

Ejercicios 2.1 .

1. Sea el conjunto universal $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, sea $A = \{1,3,5\}$,$B = \{2,4,6,8\}$ y $C = \{1,2,4,7,8\}$, defina por extensión los siguientes conjuntos:
   a) $A \cup B$.
   b) $A - B$.
   c) C^c.
   d) $B - C$.
   e) $(A \cap C) \cup (B \cap A)$.
   f) $A^c \cap C^c$.
   g) $(A - B)^c$.
   h) $(C - A)^c \cup B^c$.
2. En diagramas de Venn, sombree los conjuntos siguientes:
   a) $A \cup B$.
   b) $A - B$.
   c) C^c.
   d) $B - C$.
   e) $(A \cap C) \cup (B \cap A)$.
   f) $A^c \cap C^c$.
   g) $(A - B)^c$.
   h) $(C - A)^c \cup B^c$.
   i) $(B - C)^c$.
   j) $(A \cap C) \cap B$.
3. De un total de 60 alumnos de un colegio:
   - 15 estudian francés solamente;
   - 11 estudian francés e inglés;
   - 12 estudian alemán solamente;
   - 8 estudian francés y alemán;
   - 10 estudian inglés solamente;
   - 5 estudian inglés y alemán;
   - 3 los tres idiomas.

   Determina
   a) ¿Cuántos no estudian ningún idioma?
   b) ¿Cuántos estudian alemán?
   c) ¿Cuántos estudian alemán e inglés solamente?
   d) ¿Cuántos estudian francés?
4. En los siguientes razonamientos, indicar si son o no correctos. Justificar su respuesta; expresar el silogismo en usando cuantificadores y notación de conjuntos.
   a) Proposiciones

1) “Todos los A son B”.
2) “Todos los A son B”.

Conclusión

3) “Todos los C son A”.

b) Proposiciones
1) ‘Todos los mortales son humanos”.
2) “Todos los humanos son psicólogos”.

Conclusión

3) “Todos los psicólogos son mortales”.

c) Proposiciones
1) “Todo hombre es un animal”.
2) “Ninguna piedra es un hombre”.

Conclusión

3) “Ninguna piedra es un animal”.

d) Proposiciones
1) “Algunos abogados no son inteligentes”.
2) “Algunas personas inteligentes son ricas”.

Conclusión

3) “Algunos abogados son ricos”.

e) Proposiciones
1) “Todos los estudiantes de Física son buenos en Matemáticas”.
2) “Algunos cartageneros son estudiantes de Física”.

Conclusión

3) “Algunos cartageneros son buenos en Matemáticas”.

f) Proposiciones
1) “Todos los B son A”.
2) “Ningún C es B”.

Conclusión

3) “Algunos A no son C”.

g) Proposiciones
1) “Ningún fosil está traspasado de amor”.
2) “Algunos que están traspasados de amor son ostras”.

Conclusión

3) “Algúnas ostras no son fósiles”.

5. En el diagrama de Veen, adjunto (ver figura 2.8), representa la siguiente operación entre conjuntos: $(A-B)\cup(B-C)$.

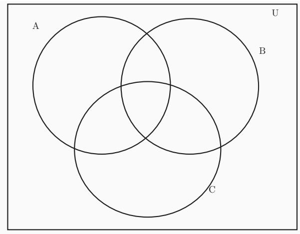


Figura 2.8: Diagrama de Venn.

6. Un grupo de jóvenes fue entrevistado acerca de sus preferencias por ciertos medios de transporte (bicicleta, motocicleta y automóvil). Los datos de la encuesta fueron los siguientes:
   i) Motocicleta solamente: 5.
   ii) Motocicleta: 38.
   iii) No gustan del automóvil: 9.
   iv) Motocicleta y bicicleta, pero no automóvil: 3.
   v) Motocicleta y automóvil pero no bicicleta: 20.
   vi) No gustan de la bicicleta: 72.
   vii Ninguna de las tres cosas: 1.
   viii No gustan de la motocicleta: 61.
   - ¿Cuál fue el número de personas entrevistadas?
   - ¿A cuántos le gustaba la bicicleta solamente?
   - ¿A cuántos le gustaba el automóvil solamente?
   - ¿A cuántos le gustaban las tres cosas?
   - ¿A cuántos le gustaba la bicicleta y el automóvil pero no la motocicleta?

Las preguntas 7 a 19 son de selección múltiple con única respuesta (TIPO I). Este tipo de preguntas consta de un enunciado y cuatro opciones de respuesta identificadas con las letras a, b, c, d . Lea detenidamente cada pregunta y seleccione la correcta. Responder las preguntas

7 a la pregunta 8 de acuerdo a la siguiente información: De un total de 60 alumnos de un

colegio: 31 estudian francés, 11 estudian francés e inglés; 12 estudian alemán solamente; 8 estudian francés y alemán; 10 estudian inglés solamente; 5 estudian inglés y alemán; 3 los tres idiomas.(Realice el respectivo diagramam de Venn para responder estas preguntas) .

7. ¿Cuántos estudian dos o más de dos asignaturas?
   a) 18
   b) 15
   c) 3
   d) 5
8. ¿Cuántos estudian solamente una asignatura?
   a) 45

b) 31
c) 37
d) 55

9. Dado el siguiente diagrama de Venn indica el conjunto

$$[(F\cap C)-D]\cup[(F\cap D)-C]\cup[(D\cap C)-F]$$

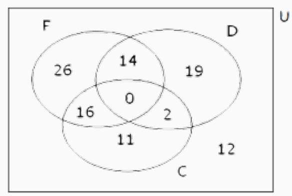


Figura 2.9: Diagrama de Venn.

a) $\{11,19,26\}$
b) $\{2,11,14,16,19,26,\}$
c) $\{0,2,14,16\}$
d) $\{2,14,16\}$

10. Si ningún héroe es cobarde y algunos soldados son cobardes; entonces,
a) Todos los soldados son héroes.
b) algunos soldados son héroes.
c) algunos soldados no son héroes.
d) todos los soldados son héroes.

11. De acuerdo al Digrama de Venn de la figura 2.10; podemos decir que:

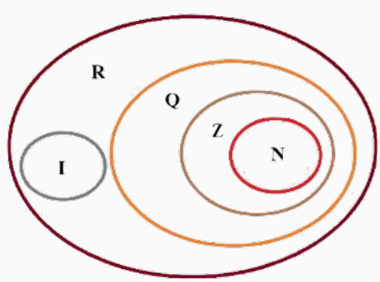


Figura 2.10: Conjuntos numéricos

a) $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$
b) $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cap\mathbb{I}$
c) $\mathbb{N}\supset\mathbb{Z}\supset\mathbb{Q}\supset\mathbb{R}$
d) $\mathbb{N}\cup\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$

12. Sea el conjunto $A = \phi$, entonces:
    a) $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 5x - 7 = 0\}$
    b) $A = \{x \in \mathbb{R} | x = 0 \wedge x = 1\}$
    c) $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}$
    d) $A = \{x \in \mathbb{R} | x = 0\}$
13. Sea el conjunto $T = \left\{x \in \mathbb{N} : x = n^2, \forall n \in \mathbb{Z}\right\}$, entonces:
    a) $T = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$.
    b) $T = \{0, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$.
    c) $T = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$.
    d) $T = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$.
14. Dado el conjunto $P = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$, tenemos que:
    a) $P = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
    b) $P = \left\{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$.
    c) $P = \left\{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
    d) $P = \left\{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq n \leq 5\right\}$.
15. Sea A un conjunto, si $\wp(A)$ conjunto potencia de A, tiene 16 elementos, entonces, el conjunto A tiene:
    a) 2 elementos.
    b) 4 elementos.
    c) 8 elementos.
    d) 16 elementos.
16. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < x < 10\}$, entonces:
    a) $A \neq B$.
    b) $B \subset A$.
    c) $A \subset B$.
    d) $A = B$.
17. Sea el conjunto potencia de M,
    $$\wp(M) = \{\phi, \{\bigstar\}, \{\blacktriangle\}, \{\clubsuit\}, \{\bigstar, \blacktriangle\}, \{\bigstar, \clubsuit\}, \{\blacktriangle, \clubsuit\}, \{\bigstar, \blacktriangle, \clubsuit\}\}$$
    entonces, tenemos que:
    a) $M = \{\bigstar\} \cap \{\blacktriangle\} \cap \{\clubsuit\}$.
    b) $M = \{\{\bigstar\}, \{\blacktriangle\}, \{\clubsuit\}\}$.
    c) $M = \{\bigstar, \blacktriangle, \clubsuit\}$.
    d) $M = \{\phi, \bigstar, \blacktriangle, \clubsuit\}$.
18. En el siguiente diagrama de Venn (Ver figura 2.11), el área sombreada corresponde a la operación entre conjuntos:

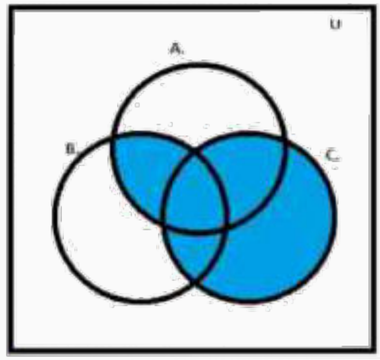


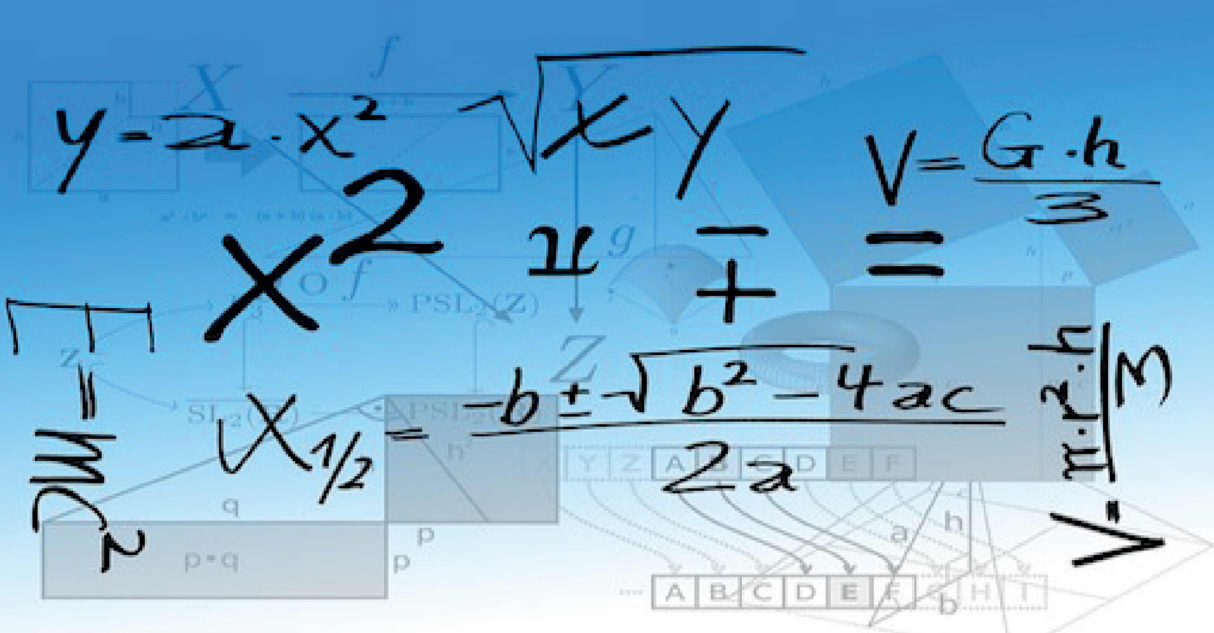
Figura 2.11: Diagrama de Venn

a) $(A \cup B) \cap C$.
b) $(A - C) \cap B$.
c) $(A \cap B) \cup C$.
d) $(B \cap C) \cup (B \cap A) \cup C$.

19. La condición falsa es:
    a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
    b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
    c) $A \cup B \subseteq A \cap B$.
    d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Parte II

ÁLGEBRA



3. NOCIONES ARITMÉTICAS Y ALGEBRAICAS

Mathematics has beauty and romance. The world of mathematics is not a boring place to be. It is an extraordinary place; it is worth spending time there[1]

Marcus du Sautoy.[2]

3.1 Números reales

En matemáticas, el conjunto de los números reales, que anteriormente denotamos por $\mathbb{R}$, incluye tanto a los números racionales (positivos, negativos y el cero) como a los números irracionales; y en otro enfoque, trascendentes[3] y algebraicos[4]. Los irracionales y los trascendentes no se pueden

[1] Las matemáticas tienen belleza y romance. El mundo de las matemáticas no es un lugar aburrido en el que estar. Es un lugar extraordinario; merece la pena pasar el tiempo allí.

[2] Marcus Peter Francis du Sautoy (Londres, 26 de agosto de 1965) es un escritor, presentador, columnista y profesor de matemáticas de la Universidad de Oxford.

En 2001 obtuvo el Premio Berwick de la Sociedad Matemática de Londres que se concede a la mejor investigación llevada a cabo por un matemático de menos de cuarenta años. Es conocido principalmente por su labor de popularización de las matemáticas y por ser un especialista en la teoría de los números. Escribe en The Times y The Guardian y ha presentado diversos programas de televisión sobre matemáticas en la BBC. Los tres libros que ha escrito hasta el momento han recibido grandes elogios por parte de la crítica. Con "la música de los números primos" ganó en 2004 el Premio Peano en Italia y en Alemania en 2005, el Premio Sartorius.

[3] Un número trascendente, también número trascendental, es un número real o complejo que no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros no todos nulos. Un número real trascendente no es un número algebraico, pues no es solución de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales. Tampoco es número racional, ya que estos resuelven ecuaciones algebraicas de primer grado, al ser real y no ser racional, necesariamente, es un número irracional. En este sentido, número trascendente es antónimo de número algebraico. La definición no proviene de una simple relación algebraica, sino que se define como una propiedad fundamental de las matemáticas. Los números trascendentes más conocidos son π y e.

[4] Un número algebraico es cualquier número real o complejo que es solución de una ecuación algebraica de la forma: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$. Donde: $n > 0$ es el grado del polinomio; $a_i \in \mathbb{Z}\ \forall i \ni 0 \leq i \leq n$ son los coeficientes

expresar mediante una fracción de dos enteros con denominador no nulo; tienen infinitas cifras decimales no periódicas, tales como: $\sqrt{5}$,π el número real $\log 2$, cuya trascendencia fue enunciada por Euler en el siglo $XVIII$.

Los números reales pueden ser descritos y construidos de varias formas; algunas son simples aunque carentes del rigor necesario para los propósitos formales de matemáticas y otras, más complejas pero con el rigor necesario para el trabajo matemático formal.
Durante los siglos XVI y XVII, el cálculo avanzó mucho aun cuando no contaba con una base rigurosa, puesto que en el momento prescindían del rigor y fundamento lógico, tan exigente en los enfoques teóricos de la actualidad, y se usaban expresiones como «pequeño», «límite», «se acerca» sin una definición precisa. Esto llevó a una serie de paradojas y problemas lógicos que hicieron evidente la necesidad de crear una base rigurosa para la matemática, la cual consistió en definiciones formales y rigurosas del concepto de número real.

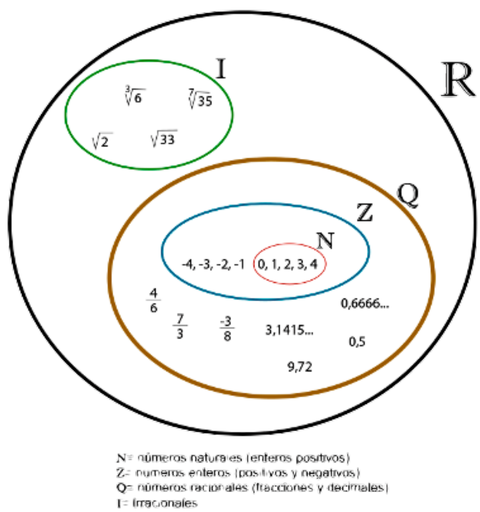


Figura 3.1: Conjunto $\mathbb{R}$ de números reales.

3.1.1 Propiedades de los números reales R

1. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces, $x + y \in \mathbb{R}$ (propiedad clausurativa de la suma).
2. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces, $x + y = y + x$ (propiedad conmutativa de la suma).
3. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asociatividad en la suma).
4. Existe $0 \in \mathbb{R}$, de manera que $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (existencia del elemento neutro para la suma).
5. Si $x \in \mathbb{R}$, entonces: $x0 = 0x = 0$ (propiededad de la multiplicación por el elemento néutro).
6. Para cada $x \in \mathbb{R}$, existe un elemento $-x \in \mathbb{R}$ tal que $-x + x = 0$ (existencia del inverso aditivo).
7. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces: $xy \in \mathbb{R}$ (propiedad clausurativa de la multiplicación).
8. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces: $xy = yx$ (propiedad conmutativa de la multiplicación).
9. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces: $(xy)z = x(yz)$ (asociatividad en la multiplicación).

del polinomio; y $0 \neq a_n$.

10. Existe $1 \in \mathbb{R}$, de manera que $1x = x1 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (existencia del elemento neutro para la multiplicación).
11. Para cada $x \neq 0, x \in \mathbb{R}$, existe un elemento $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $xx^{-1} = 0$ (existencia del inverso multiplicativo).
12. Si $x, y, \in \mathbb{R}$, entonces se cumple solo una de estas condiciones:
    - $x < y$.
    - $x > y$.
    - $x = y$.

    (Tricotomía)
13. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y$ y $y < z$, entonces, $x < z$ (transitividad).
14. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ y $x < y$, entonces, $x + z < y + z$ (monotonía en la suma).
15. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y$ y $z > 0$, entonces, $xz < yz$ (monotonía en la multiplicación).
16. $\forall\ \frac{x}{y}, \frac{z}{w} \in \mathbb{Q}$ se tiene:
    - $\frac{x}{y} \pm \frac{z}{w} = \frac{xw \pm yz}{yw}$
    - $\frac{x}{y}\frac{z}{w} = \frac{xz}{yw}$
    - $\frac{x}{y} \div \frac{z}{w} = \frac{xw}{yz}$
17. $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Z}$, $x\frac{y}{z} = \frac{xz + y}{z}$

Ejemplo 3.1

.

- $-5 \in \mathbb{R}$, $2 \in \mathbb{R}$, entonces, $(-5) + 2 = -3 \in \mathbb{R}$
- $3 + (-5) = (-5) + 3 = -2$
- $((-7) + 5) + 6 = -7 + (5 + 6)$
- $0 + 9 = 9$
- $(9)(0) = 0$
- $(-5) + 5 = 0$
- $-5 \in \mathbb{R}$, $2 \in \mathbb{R}$, entonces, $(-5)2 = -10 \in \mathbb{R}$
- $3(-5) = (-5)3 = -15$
- $((-7)5)6 = (-7)(5 + 6)$
- $1(9) = 9$
- $8(8^{-1}) = 1$
- $-5 < 2$, entonces, $-5 + 4 < 2 + 4$
- $-5 < 2$, entonces, $(-5)(4) < (2)(4)$

3.2 Valor absoluto

Definición 3.1 ***Valor absoluto***

Definimos el *valor absoluto* de un número real x, que representamos por $|x|$, mediante:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

También, observamos que $|x|$ representa la distancia del origen al punto x y de forma más general, que $|x_1 - x_2|$ representa la distancia entre x_1 y x_2.

Ejemplo 3.2

.

- $|5| = 5$, pues $5 > 0$.
- $|-3| = -(-3) = 3$, pues $-3 < 0$.
- $|\pi - 3| = \pi - 3$, pues $\pi - 3 > 0$.
- $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$, pues $3 - \pi < 0$.
- $|0| = 0$.

Si x_1 y x_2 son las coordenadas de dos puntos sobre una recta, la distancia entre ellos se define como $|x_1 - x_2|$. En particular, $|x| = |x - 0|$ representa la distancia del origen al punto x.

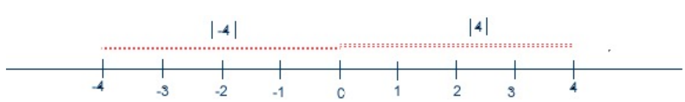


Figura 3.2: Representación geométrica del valor absoluto de un número.

La relación de orden entre números reales tiene una interpretación geométrica muy simple:

Definición 3.2

$x < y$ si y solo si el punto que representa esta localizado a la izquierda del punto que representa.

La representación geométrica es de gran utilidad en la resolución de problemas y en la visualización de muchas propiedades importantes de los números reales. Esta será presentada más adelante en el en la sección 11.3.1

3.3 Expresiones algebraicas

Definición 3.3 ***Variable***

Llamamos *variable* a una letra o símbolo que representa cualquier elemento de un conjunto determinado. Llamamos *constante* a un elemento fijo del conjunto considerado. Si tal conjunto es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, las variables y constantes representan números reales.

Generalmente, las variables se representan por las últimas letras del alfabeto, x, y, z, w. En algunos casos, representamos las constantes por las primeras letras del alfabeto, a, b, c, d. En estos casos, los símbolos a, b, etc representan elementos fijos pero arbitrarios del conjunto considerado.

Ejemplo 3.3

En la expresión:

$$2x^2 + 4x - 7,$$

la letra x es una variable y los números $2, 4$ y 7 son constantes.

Ejemplo 3.4

En la expresión:

$$ax + b,$$

x es una variable y a y b son constantes.

Definición 3.4 Expresión Algebraica

Llamamos *expresiones algebraicas* a las constantes, las variables o las combinaciones de constantes y variables mediante las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raíces.

Ejemplo 3.5

Las siguientes son algunas expresiones algebraicas:

$$5, \quad x^3, \quad 3ay^2, \quad (6xy - 2y)5x^2, \quad -3x^2y + 7x + 2y - 8,$$

$$\frac{2x+3}{x^2 - 5x - 6}, \quad (2z^{-5} - 3z^{-1})^{\frac{3}{5}}, \quad \frac{\sqrt{x+2y}}{x - \sqrt[3]{3x}}$$

En una expresión algebraica, cada una de las partes separadas por medio de una suma o de una resta se llama un *término*.

Ejemplo 3.6

En la expresión:

$$5x^2y - \frac{2x+1}{3y-5} + \sqrt{xy-6} + 7,$$

los términos son:

$$5x^2y,\ \frac{2x+1}{3y-5},\ \sqrt{xy-6} \text{ y } 7.$$

N Expresiones tales como $\frac{2x+1}{3y-5}$ y $\sqrt{xy-6}$ se consideran como un solo término.

Definición 3.5 *Coeficiente*

Si un término consiste de un producto de dos o mas factores, decimos que cada factor es el *coeficiente* del producto de los otros factores. Por ejemplo, en el término $7x^2y$, 7, es el coeficiente de x^2y; si un coeficiente es un número, lo llamamos el coeficiente numérico. En el término anterior $7x^2y$, 7 es el coeficiente numérico.

Definición 3.6 Monomio, binomio, trinomio

Si una expresión algebraica consiste de un solo término, la llamamos un *monomio*; si consiste de dos términos la llamamos un *binomio*; , si consiste de tres términos la llamamos un *trinomio*; expresiones algebraicas de más de tres términos se denominan *polinomio*.

Ejemplo 3.7

- **Monomio**: $3x^5$
- **Binomio**: $3x^5 - 7x^2$
- **Trinomio**: $3x^5 - 7x^2 + 8y$

Estudiemos algunas operaciones que se utilizan para formar expresiones algebraicas.

3.4 Exponentes enteros positivos

En nuestros ejemplos de expresiones algebraicas, hemos utilizado símbolos tales como x^3 y a^3. Un símbolo como x^2 representa el producto $x \cdot x$, similarmente a^3 representa el producto $a \cdot a \cdot a$. En general, establecemos la siguiente definición.

Definición 3.7 Potenciación
Si a es un número real arbitrario y n es un entero positivo, definimos a^n como el producto de n factores iguales a a. Es decir

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores de } a}$$

En el símbolo a^n, a se llama la *base* y n el *exponente* de la potencia. También decimos que a^n es a elevado a la potencia n.

Ejemplo 3.8

- $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
- $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$
- $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{64}$
- $(\sqrt{2})^6 = (\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}) = 8$

Ejemplo 3.9

- $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$
- $2^5 = (2)(2)(2)(2)(2) = 32$

A partir de la definición podemos comprobar las siguientes propiedades básicas que satisfacen los exponentes enteros positivos. Si a y b son números reales arbitrarios y m y n son enteros positivos, entonces, tenemos:

3.4.1 Propiedades de la potenciación

Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$ entonces, sea $a, b \in \mathbb{R}$; $m, n \in \mathbb{N}$, entonces, tenemos que:

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a \div b)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Ejemplo 3.10

- $5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5 = 625$
- $(2^2)^4 = 2^{2\cdot 4} = 2^8 = 256$
- $(3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2 = 9 \cdot 25 = 225$
- $(ab)^3 = a^3 b^3$

Ejemplo 3.11

- $x^4 x^7 = x^{4+7} = x^{11}$
- $y^4 y^{-7} = y^{-3} = \dfrac{1}{y^3}$
- $\dfrac{c^9}{c^5} = c^4$
- $(b^4)^6 = b^{4\cdot 6} = b^{24}$
- $31252^0 = 1$
- $(3x)^4 = 3^4 x^4 = 81x^4$
- $\left(\dfrac{m}{7}\right)^2 = \dfrac{m^2}{7^2} = \dfrac{m^2}{49}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n} = \dfrac{1}{\dfrac{a^n}{b^n}} = \dfrac{\dfrac{1}{1}}{\dfrac{a^n}{b^n}} = \dfrac{b^n}{a^n}$
- $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^n$

Simplificación de expresiones con exponente

Simplificar una expresión consiste en reducirla a una expresión mucho más sencilla de manejar y operar. En el caso de la potenciación nos interesa que los exponentes queden expresados como un número positivo y que las bases estén una sola vez en el término.

Ejemplo 3.12

Simplifiquemos: $(2a^3b^2)(3ab^4)^3$

$$\begin{aligned}
(2a^3b^2)(3ab^4)^3 &= (2a^3b^2)\left[3^3a^3(b^4)^3\right] \\
&= (2a^3b^2)(27a^3b^{12}) \\
&= 2\cdot 27a^3a^3b^2b^{12} \\
&= 54a^6b^{14}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.13

Simplifiquemos: $\left(\frac{x}{y}\right)^3\left(\frac{y^2x}{z}\right)^4$

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{y}\right)^3\left(\frac{y^2x}{z}\right)^4 &= \frac{x^3}{y^3}\frac{(y^2)^4x^4}{z^4}\\ &= \frac{x^3}{y^3}\frac{y^8x^4}{z^4}\\ &= \frac{x^3x^4y^8}{y^3z^4}\\ &= \frac{x^7y^5}{z^4}\end{aligned}$$

Ejemplo 3.14

Simplifica las expresiones y elimina los exponentes negativos en $\dfrac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2}$

$$\begin{aligned}\frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2} &= \frac{6ss^2}{2t^2t^4}\\ &= \frac{3s^3}{t^6}\end{aligned}$$

Ejemplo 3.15

$$\begin{aligned}\left(\frac{y}{3z^3}\right)^{-2} &= \left(\frac{3z^3}{y}\right)^2\\ &= \frac{9z^6}{y^2}\end{aligned}$$

3.5 Exponentes racionales

En la sección anterior estudiamos el caso de a^n, donde $n \in \mathbb{Z}$, Veamos el caso en el que n es racional; es decir, si $n \in \mathbb{Q}$. Veamos algunas definiciones y ejemplos preliminares.

Definición 3.8 ***Radicación***

Sea $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definimos la *raíz n-énsima principal* de b de la siguiente manera:

$$\sqrt[n]{b} = a \Longleftrightarrow a^n = b$$

n se llama *índice*, b se llama *cantidad subradical* o *radicando* y a **raíz de la potencia**. El símbolo $\sqrt{\cdot}$ se llama *radical*

Ejemplo 3.16

- 3 y -3 son raíces cuadradas de 9, pues $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$.
- 2 es una raíz cúbica de 8, puesto que $2^3 = 8$.
- -3 es una raíz cúbica de -27, puesto que $(-3)^3 = -27$.

Se puede demostrar que todo número real diferente de cero tiene exactamente n raíces n-ésimas, aunque la mayoría de ellas son números complejos. Entre las raíces n-ésimas de un número real a, vamos a elegir una de ellas como la *raíz n-ésima principal*, esta raíz la representamos por el símbolo $\sqrt[n]{a}$ y la definimos como sigue:

Proposición 3.1

Sea n un entero positivo mayor que 1 y a un número real. Establecemos que:

1. Si $a > 0$, $\sqrt[n]{a}$ es la raíz n-ésima positiva de a.
2. Si $a < 0$ y n es impar, $\sqrt[n]{a}$ es la raíz n-ésima negativa de a.
3. Si $a = 0$, $\sqrt[n]{a} = 0$.
4. Si $a < 0$ y n es par, $\sqrt[n]{a}$ no la definimos, pues en este caso, no existe ningún número real r tal que $r^n = a$.

Ejemplo 3.17

- $\sqrt[4]{81} = 3 \quad \text{porque} \quad 3^4 = 81$
- $\sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{porque} \quad (-2)^3 = 8$

N Obsérvese que si n es par y $a \in \mathbb{Z}^-$, es decir a es negativo; entonces, $\sqrt[n]{a}$ no está definido en $\mathbb{R}$, porque la potencia par de todo número real es siempre positiva. Por ejemplo si $\sqrt[2]{-4} = x$, entonces, $x^2 = x \cdot x = -4$; lo anterior es imposible; ya que si $x \in \mathbb{Z}^+$ (es decir x es positivo), entonces, $x \cdot x$ es positivo; y si $x \in \mathbb{Z}^-$ (es decir x es negativo), entonces, $x \cdot x$ es positivo. En ningún caso, $x \cdot x$ será igual a -4 un número negativo[5].

El símbolo $\sqrt[n]{a}$ se llama un *radical*, el número a es el *radicando* y el número n es el *índice* del radical. Cuando $n = 2$ en lugar de $\sqrt[2]{a}$, escribimos simplemente $\sqrt{a}$.

Ejemplo 3.18

- $\sqrt{25} = \pm 5$
- $\sqrt[3]{-64} = -4$

[5]Para definir la raíz par de un número negativo, se recurre a la definición de unidad imaginaria y la conformación de los números complejos; esto es $\sqrt{-1} = i$ unidad imaginaria y $\mathbb{C} = \left\{a + bi | a, b \in \mathbb{R} \wedge i = \sqrt{-1}\right\}$ conjunto de números complejos. El estudio de este conjunto numérico no hará parte de este curso.

- $\sqrt[5]{\dfrac{-1}{32}} = -\dfrac{1}{2}$
- $\sqrt{-9}$ y $\sqrt[6]{-72}$ no son números reales; forman un conjunto llamado números imaginarios.

N Recalcamos que $\sqrt[n]{a}$ no existe en el caso en que a es negativo y n es par.

Definición 3.9

Sea q un entero positivo mayor que 1 y a un número real, tal que $\sqrt[q]{a}$ exista; establecemos que

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

Ejemplo 3.19

- $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.
- $(-32)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-32} = -2$.
- $(-16)^{\frac{1}{4}}$ no existe porque $\sqrt[4]{-16}$ no es un número real.

Definición 3.10

Sea $\frac{p}{q}$ un número racional donde p y q son enteros positivos diferentes, y sea a un número real tal que $\sqrt[q]{a}$ exista; establecemos que:

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = (\sqrt[q]{a})^p$$

De las definiciones anteriores y las leyes de los exponentes, podemos deducir fácilmente que si $a^{\frac{p}{q}}$ existe, entonces, también $a^{\frac{p}{q}}$ es la raíz q-ésima principal de a^p; es decir, tenemos:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (a^p)^{\frac{1}{q}}$$

Finalmente, extendemos nuestra definición de a^n al caso en que n es un número racional negativo.

Definición 3.11

Sea $\dfrac{p}{q}$ un número racional con p y q enteros positivos diferentes y sea a un número tal que $\sqrt[q]{a}$ exista; establecemos que:

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$$

Ejemplo 3.20

- $27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$
- $81^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{81^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{(\sqrt[4]{81})^3} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$
- $y^{\frac{4}{7}} = (\sqrt[7]{y})^4 = \sqrt[7]{y^4}$
- $m^{-3} = m^{-\frac{3}{1}} = \dfrac{1}{m^3}$

Las propiedades de los exponentes (3.4.1)-(3.4.1) son válidas para exponentes racionales siempre y cuando a y b sean *números positivos*. Cuando a y b son negativos, algunas de las leyes (3.4.1)-(3.4.1) no se cumplen.

$$\left[(-4)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = 4$$
$$(-4)^{2\cdot\frac{1}{2}} = (-4)^1 = -4$$

Observamos que:

$$\left[(-4)^2\right]^{\frac{1}{2}} \neq (-4)^{2\cdot\frac{1}{2}}$$

Luego, la propiedad:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

no se cumple en este caso. Otro contraejemplo en el que podemos ver que las propiedades de los exponentes (3.4.1)-(3.4.1) no son validas si a y b son negativos es:

$$\left(\frac{-2}{-5}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$$

pero,

$$\frac{(-2)^{\frac{1}{4}}}{(-5)^{\frac{1}{4}}}$$

no está definido. Luego, la propiedad:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

no se cumple en este caso. Para evitar este tipo de problemas, en adelante, cuando trabajemos con exponentes, solo consideraremos bases positivas.

3.5.1 Propiedades de la radiación

En algunas ocasiones, es más ventajoso expresar las cantidades en términos de radicales que en términos de exponentes racionales. Las leyes de los radicales se siguen inmediatamente de las leyes de los exponentes.

Proposición 3.2

Si m y n son enteros positivos y a y b son números reales positivos, entonces

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
4. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{si } n \text{ es impar} \\ |a| & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

Ejemplo 3.21

- $\sqrt{180} = \sqrt{36 \cdot 5} = \sqrt{36}\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$
- $\sqrt[3]{\dfrac{250}{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{125 \cdot 2}}{3} = \dfrac{\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{2}}{3} = \dfrac{5\sqrt[3]{2}}{3}$
- $\sqrt[6]{81} = \sqrt[3]{\sqrt{81}} = \sqrt[3]{9}$
- Si x es un número real, entonces, $\sqrt{x^2} = |x|$ (¿Por qué?).

Al simplificar un radical, lo hacemos de tal forma que no existan potencias n-ésimas de radicales cuyo índice es n, no se tengan fracciones bajo el signo de radical y los radicales tengan el índice más pequeño posible.

Ejemplo 3.22

- $\sqrt[4]{48x^6y^9} = \sqrt[4]{(16x^4y^8)(3x^2y)} = \sqrt[4]{16x^4y^8}\,\sqrt[4]{3x^2y} = 2xy^2\,\sqrt[4]{3x^2y}$
- $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{y^2}\sqrt[3]{y}} = \dfrac{\sqrt[3]{xy}}{y}$

En la simplificación de radicales, generalmente, es más fácil trabajarlos como exponentes racionales:

Ejemplo 3.23

$$\sqrt[4]{\frac{256a^2b^4}{c^2}} = \left(\frac{2^8a^2b^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{2^2a^{\frac{1}{2}}b}{c^{\frac{1}{2}}} = \frac{4ba^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{c^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}} = \frac{4ba^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}}{c} = \frac{4b}{c}\sqrt{ac}$$

N Para terminar, queremos señalar un error muy frecuente en el uso de los radicales. Este error consiste en creer que se tiene la siguiente fórmula, que es incorrecta.

$$\sqrt[n]{a \pm b} = \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$$

Ejemplo 3.24

- $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9}+\sqrt{16}$, pues $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ y $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$.
- $\sqrt[3]{4^3-2^3} \neq \sqrt[3]{4^3}-\sqrt[3]{2^3}$, pues $\sqrt[3]{4^3-2^3}=\sqrt[3]{56}$ y $\sqrt[3]{4^3}-\sqrt[3]{2^3}=4-2=2$.

Ejemplo 3.25

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^4} &= \sqrt[3]{x^3x} \\ &= \sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{x} \\ &= x\sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.26

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{81x^8y^4} &= \sqrt[4]{81}\sqrt[4]{x^8}\sqrt[4]{y^4} \\ &= 3\sqrt[4]{(x^2)^4}y \\ &= 3x^2y \end{aligned}$$

Ejemplo 3.27

$$\begin{aligned} \sqrt{32}+\sqrt{200} &= \sqrt{16\cdot 2}+\sqrt{100\cdot 2} \\ &= \sqrt{16}\sqrt{2}+\sqrt{100}\sqrt{2} \\ &= 4\sqrt{2}+10\sqrt{2} \\ &= 14\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.28

- $4^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{4}=\sqrt{4}=2$
- $8^{\frac{2}{3}}=\left(\sqrt[3]{8}\right)^2=2^2=4$ otra forma de resolver este ejercicio es:
- $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4$
- $125^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{125^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{125}}=\dfrac{1}{5}$
- $a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{7}{3}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{7}{3}}=a^{\frac{8}{3}}$
- $\dfrac{X^{\frac{2}{5}}X^{\frac{7}{5}}}{X^{\frac{3}{5}}}=X^{\frac{2}{5}+\frac{7}{5}-\frac{3}{5}}=X^{\frac{6}{5}}$

- $$\begin{aligned}(2m^3n^4)^{\frac{3}{2}} &= 2^{\frac{3}{2}}(m^3)^{\frac{3}{2}}(n^4)^{\frac{3}{2}}\\ &= (\sqrt{2})^3 m^{3\frac{3}{2}}(n^4)^{\frac{3}{2}}\\ &= 2\sqrt{2}m^{\frac{9}{2}}n^6\end{aligned}$$
- $\sqrt{x\sqrt{x}} = (xx^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = (x^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}}$

3.5.2 Racionalización

El proceso de racionalización consiste en eliminar el radical del numerador o denominador en una expresión racional. Para ello, multiplicamos y dividimos la fracción por la expresión algebraica apropiada de tal manera que se elimine el radical deseado. Si el radical por eliminar es de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$, entonces se multiplica y divide la fracción por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

Si el radical por eliminar es de la forma $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$, se multiplica y divide la fracción por su *conjugado* $\sqrt{x} \mp \sqrt{y}$. En efecto:

$$\begin{aligned}(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}) &= (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2\\ &= x-y\end{aligned}$$

Aplicando el producto notable, producto de la suma por la diferencia de dos términos:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Este producto notable se estudiará con más detalle en el siguiente capítulo. Si el radical por eliminar es de la forma $\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{y}$, entonces, se multiplica y divide la fracción por $\sqrt[3]{x^2} \mp \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$. En efecto:

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})\\ (\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{y})^3\\ x-y.\end{aligned}$$

Aplicando la expresión de la suma o diferencia de cubos perfectos $x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$. Este producto notable tambien será estudiado en detalle en el siguiente capitulo.

Ejemplo 3.29

Racionalicemos las siguientes expresiones, eliminando el radical del denominador:

- $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
- $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$
- $\dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}}\dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^5}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^7}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{a}$

- $$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x}-1} &= \frac{1}{\sqrt{x}-1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x})^2-1^2}\\ &= \frac{(\sqrt{x})^2+1}{x-1}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} &= \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\\ &= \frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{(1+\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}\\ &= \frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1^3-(\sqrt[3]{x})^3}\\ &= \frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1-x}\end{aligned}$$

3.6 Logaritmación

Definición 3.12 *Logaritmo*

Sea $a,b\in\mathbb{R}$, $a>0\wedge a\neq 1$ $n\in\mathbb{R}$, definimos la *logaritmación* como

$$\log_a b = n \iff a^n = b$$

Esto se lee: logaritmo en base a de b es igual a n.

En otras palabras, sea $b\in\mathbb{R}$ (argumento b), la operación logaritmo le asigna el exponente n (o potencia) a la que un número fijo a (base) se ha de elevar para obtener dicho argumento. Es la operación inversa de a a la potencia n.

Ejemplo 3.30

- $\log_3 27 = 3$ porque $3^3 = 27$.
- $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$.
- $\log_5 125 = 3$ porque $5^3 = 125$.
- $\log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{1000} = 3$ porque $\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}$.
- $\log_{\sqrt{5}} 125 = 6$ porque $(\sqrt{5})^6 = 5^{\frac{6}{2}} = 5^3 = 125$.
- $\log_3 \sqrt{243} = \frac{5}{2}$ porque $3^{\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{3^5} = \sqrt{243}$.

- $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$ porque $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^{2} = 4.$

Los números negativos no tienen logaritmo en $\mathbb{R}$, ya que cualquiera que sea el exponente n, se tendrá siempre que a^n será mayor que cero, $a^n > 0$; en consecuencia, no hay ningún valor real de n que pueda satisfacer $a^n = x$ cuando x sea menor que 0. Si el número real a se encuentra dentro del intérvalo $0 < b < 1$, entonces, $\log_a b$ da un valor negativo o se dice que es un logaritmo negativo. Entre los logaritmos más utilizados se encuentra el *logaritmo natural*[6] , cuya base es e, *logaritmo común* cuya base es 10 y *logaritmo binario* con base 2. Tenemos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \log_{10}(a) &= \log(a) \\ \log_e(a) &= \ln(a) \end{aligned}$$

El logaritmo más ampliamente utilizado es el natural, ya que tiene multitud de aplicaciones en física, matemáticas, ingeniería y en ciencias en general. También, es bastante utilizado el logaritmo decimal, que se indica como $\log(x)$, en ciencias que hacen uso de las matemáticas, como la química, en la medida de la acidez (denominada pH), y en física en magnitudes como la medida de la luminosidad (candela), de intensidad de sonido (dB), de la energía de un terremoto (escala sismológica de Richter), etc. En informática, se usa el logaritmo en base 2 la mayoría de veces.

Propiedades de logaritmo

Los logaritmos mantienen ciertas identidades aritméticas muy útiles a la hora de realizar cálculos: Sea $a, b, c \in \mathbb{R}, a > 0 \wedge a \neq 1$ $n \in \mathbb{R}$

- $\log_b b = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a \left(b^c\right) = c \log_a b$
- $\log_a \sqrt[c]{b} = \frac{\log_a b}{c}$
- $\log_a b = \frac{\log_k b}{\log_k a}$ donde k es cualquier base válida. Si hacemos $k = b$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- No existe el logaritmo de un número con base negativa.($\sim \exists \log_{-a} b$)
- No existe el logaritmo de un número negativo.($\sim \exists \log_a (-x)$)
- No existe el logaritmo de cero.($\sim \exists \log_a 0$)

3.7 Número e

El número e, conocido a veces como *número de Euler* o *constante de Napier,* fue reconocido y utilizado por primera vez por el matemático escocés John Napier, quien introdujo el concepto de logaritmo en el cálculo matemático. Es considerado el número por excelencia del cálculo, así como

[6] En una sección posterior (ver sección 3.7 y 3.7.1), se profundizará sobre este logaritmo y el número e.

π lo es de la geometría y el número i, del análisis complejo. Este número se utiliza en ecuaciones que describen el comportamiento de acontecimientos físicos regidos por leyes sencillas, como pueden ser: la velocidad de vaciado de un depósito de agua, el giro de una veleta frente a una ráfaga de viento, el movimiento del sistema de amortiguación de un automóvil o el cimbreo de un edificio metálico en caso de terremoto. De la misma manera, aparece en muchos otros campos de la ciencia y la técnica, describiendo fenómenos eléctricos y electrónicos (descarga de un condensador, amplificación de corrientes en transistores BJT, etc.), biológicos (crecimiento de células, etc.), químicos (concentración de iones, periodos de semidesintegración, etc.), y muchos más.
El número e, al igual que el número π y el número áureo φ, es un irracional, no expresable por la razón de dos enteros; o bien, no puede ser expresado con un número finito de cifras decimales o con decimales periódicos. Además, es un número trascendente, es decir, que no puede ser obtenido mediante la resolución de una ecuación algebraica con coeficientes racionales. Su valor aproximado (truncado) es:

$$e \approx 2{,}71828182845904523536028747135 27..$$

Definición 3.13

$$\begin{aligned} e &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots \end{aligned}$$

3.7.1 Logaritmo natural

El *logaritmo natural* suele ser conocido normalmente como *logaritmo neperiano*, aunque esencialmente son conceptos distintos. Se denomina logaritmo natural o informalmente logaritmo neperiano al logaritmo cuya base es el número e. El logaritmo natural se suele notar como $\ln(x)$ o a veces, como $\log_e(x)$, porque para ese número, se cumple la propiedad que el logaritmo vale 1.

Ejemplo 3.31

- $\ln(e) = 1$ porque $e^1 = e$
- $\ln(7{,}38905) = 2$ porque $e^2 = 7{,}38905$

Propiedades del logaritmo natural

El logaritmo natural verifica las propiedades de logaritmo vistas en la sección (3.6) y además:

- $e^{\ln(x)} = x$ para todo $x > 0$
- $\ln(e^x) = x$

Ejercicios 3.1

1. Carl no sabía que su cuenta bancaria estaba en 0 cuando escribió una serie de cheques de $ 100. Por cada cheque que pasaba, le cargarón $ 125 en su cuenta. (Además de los $ 100 de cada cheque, hubo un cargo por sobregiro de $ 25.) Después del primer cheque, su cuenta tenía ? $ 125. Después de 6 cheques, ¿cuál fue el balance de su cuenta?
2. Brenda pensaba que llevaba 3 barras de chocolate a un picnic con 5 amigos. Cuando llegó con los chocolates, descubrió que su hermano se había comido la mitad de una barra. Si a cada persona le toca la misma cantidad, (ella y sus 5 amigos), ¿cuántas barras le tocan a cada persona?
3. Durante una tormenta, la temperatura cayó $\frac{1}{2}$ grado cada minuto. Al inicio de la tormenta, la temperatura era de $83°F$. Una expresión que representa la temperatura t minutos después de que empezó la tormenta es $-\frac{1}{2}t+83$. ¿Cuál fue la temperatura después de 8 minutos?
4. Calcula el valor de x en las siguientes expresiones, aplicando la definición de logaritmo.
   a) $\log_2 128$
   b) $\ln e^3 = x$
   c) $\log_4 1$
   d) $\log_2 \frac{1}{8}$
   e) $\log_5 0,2$
   f) $\log_x \frac{1}{16} = -4$
   g) $\log_x 7 = -2$
   h) $\log 0,01 = -2$
   i) $\log_x 4 = -\frac{1}{2}$
   j) $\log_2 x = -\frac{1}{2}$
   k) $\log_3 x = -2$
   l) $\log_{\frac{1}{8}} x = \frac{1}{3}$
5. Realiza las siguientes operaciones:
   a) $\log\left(4-\sqrt{6}\right)+\log\left(4+\sqrt{6}\right)$
   b) $\frac{1}{2}\log\left(12-2\sqrt{11}\right)+\frac{1}{2}\log\left(12+2\sqrt{11}\right)$
6. Racionaliza las siguientes expresiones:
   a) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$
   b) $\frac{1}{\sqrt{2}-2}$
   c) $\frac{2}{\sqrt[4]{2x^2y^3}}$
   d) $\frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$
7. Simplifica las expresiones:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\sqrt{xy^2}}{\sqrt[4]{x^4y}}$
b) $\sqrt{27}-\sqrt{50}+\sqrt{12}+\sqrt{8}$
c) $5\sqrt{125}+6\sqrt{45}-7\sqrt{20}+\dfrac{3}{2}\sqrt{80}$
d) $\sqrt{125}+\sqrt{54}-\sqrt{45}-\sqrt{24}$

8. Simplifica las expresiones:
   a) $\dfrac{5\left(3^3 10\right)^2}{3^2 60^2}$
   b) $3\left((2\cdot 3)^{-1}\dfrac{1}{2^3}\right)^{-1}\left(3\cdot 2^2\right)^{-2}$
9. Simplifica las siguientes expresiones:
   a) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^3\left(\dfrac{3}{5}\right)^4$
   b) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^3$
   c) $\left(\dfrac{7}{2}\right)^{-1}\div\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$
   d) $\left(\dfrac{11}{4}\right)^3\div\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$
   e) $\left[\left(\dfrac{5}{3}\right)^2\right]^{-1}$
10. Calcula los valores de las siguientes potencias:
   a) $32^{\frac{3}{2}}$
   b) $64^{\frac{2}{3}}$
   c) $81^{0,75}$
   d) $8^{0,\widehat{3}}$

3.8 Polinomios

3.8.1 Definición de polinomios

Definición 3.14 Expresión algebraica
Una expresión algebraica se obtiene a partir de variables y números reales, mediante sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias o extracción de raíces,

como por ejemplo:

$$4x^6-3x^3+6x^2-3, \qquad 3y^5+2y^3+\frac{9}{y}, \qquad \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}}, \qquad \frac{6x^2y+\frac{y}{x^2}}{\sqrt[3]{1-xy}}$$

Asumimos que x, y representan números reales y que la expresión representa un número real. Esto último puede imponer condiciones sobre los valores que pueden tomar las variables. Así, en los ejemplos dados antes:

- $4x^6-3x^3+6x^2-3$ representa un número real, cualquiera sea el valor que tome x.

- $3y^5 + 2y^3 + \frac{9}{y}$ representa un número real siempre que y sea diferente de 0.
- $\dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x+y}}$ representa un número real si $x + y > 0$.
- $\dfrac{6x^2y + \frac{y}{x^2}}{\sqrt[3]{1 - xy}}$ representa un número real si $x \neq 0$ y $1 - xy \neq 0$, es decir, $y \neq \frac{1}{x}$.

Al reemplazar las variables por valores que ellas puedan tomar, se obtiene, claro está, un número real que es el valor de la expresión en esos números. Así por ejemplo:

- El valor de $4x^6 - 3x^3 + 6x^2 - 3$ en $x = 0$ es $4(0)^6 - 3(0)^3 + 6(0)^2 - 3 = -3$.
- El valor de $\dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x+y}}$ en $x = 2, y = -1$ es $\dfrac{2^2 + (-1)^2}{\sqrt{2 + (-1)}} = 5$.

Estudiaremos más detalladamente las expresiones algebraicas llamadas *polinomios*.

Definición 3.15 Polinomio en x

Un *polinomio* en x con coeficientes reales es una suma finita de productos de la forma $a_k x^k$ donde el coeficiente a_k es un número real y k es un entero no negativo. De este modo, un polinomio tiene la forma

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

donde n es un entero no negativo, a_i es un número real para $0 \leq i \leq n$. Su *grado* es el mayor exponente n de x, tal que $a_n \neq 0$ y a_n es su coeficiente principal.

Si no se hace necesario explicitarlo, el polinomio puede representarse en la forma $p(x)$. El conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales es denotado por $\mathbf{R}[x]$.

Ejemplo 3.32

Son polinomios los siguientes:

- $3 + 12x^3 + \frac{25}{4}x^7 - 36x^9$. Su grado es 9 y su coeficiente principal es -36.
- $-\frac{1}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2}x + x^2$. Su grado es 2 y su coeficiente principal es 1.
- $-1 + 1,5x^2 + 0,75x^7 - 1,25x^7$. Su grado es 7 y su coeficiente principal es $-1,25$.
- $\pi + 3x, -4 + \sqrt{2}x$ y todas las expresiones de la forma $b + ax$ con $a, b \in R$. Los polinomios de grado 1 son los de esta forma para $a \neq 0$.
- $2 = 2x^0$, $-\sqrt{7} = -\sqrt{7}x^0$, $\dfrac{9}{2} = \dfrac{9}{2}x^0$ y todas las constantes no cero son los polinomios de grado 0: si $a \neq 0$, $a = ax^0$. El 0 es también un polinomio constante, pero no se le atribuye grado.

Ejemplo 3.33

No son polinomios los siguientes:

- $3 + 4x^2 + 6x^{-3}$, pues el exponente de x en el tercer sumando es un entero negativo.
- $4 + 2\sqrt{x} + x + 3x^3$, pues el exponente de x en el segundo sumando es positivo, pero fraccionario.

- $\dfrac{7x+12x^5-6x^{10}}{6+12x^3}$ no es un polinomio, es un cociente de polinomios llamado *fracción racional*.

Definición 3.16 ***Polinomios son iguales***

Dos polinomios son iguales si tienen el mismo grado y para cada potencia de x, x^k, el coeficiente de x^k en un polinomio es igual al coeficiente en el otro.

Ejemplo 3.34

- $-1+3x^2-4x^5+9x^7 = a_0+a_1x+\cdots+a_7x^7$ si y solo si $a_0=-1$, $a_1=0$, $a_2=3$, $a_3=0$, $a_4=0$, $a_5=-4$, $a_6=0$, $a_7=9$.
- $4x+6x^2+12x^3 = b_0+b_1x+\cdots+b_5x^5$ si y solo si $b_0=0$. $b_1=4$, $b_2=6$, $b_3=12$, $b_4=0$, $b_5=0$.
- Los polinomios $-1-3x+2x^3-x^5$ y $1+a_1x+\cdots+a_nx^n$ no pueden ser iguales, porque los términos independientes son distintos: en el primero es -1 y en el segundo es 1.

3.8.2 Operaciones con polinomios

Adición y Sustracción de Polinomios

Definición 3.17 ***Términos semejantes***

Se llaman *términos semejantes* los que difieren únicamente en su coeficiente numérico, por ejemplo $5x^2y$ y $-7x^2y$ son términos semejantes.

El procedimiento para sumar y restar polinomios está basado directamente en las propiedades asociativas y conmutativas de la adición y multiplicación de números reales, y en la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. Básicamente, lo que se hace es agrupar y reducir los términos semejantes.

Ejemplo 3.35

Efectuemos la siguiente suma:

$$(4x^2-2xy+2y^2+7x)+(6xy-5y^2+3x^2)$$

Primero, utilizamos las propiedades conmutativa y asociativa para agrupar los términos semejantes, obteniendo:

$$(4x^2+3x^2)+(-2xy+6xy)+(2y^2-5y^2)+7x,$$

luego, aplicamos la propiedad distributiva para reducir los términos semejantes, obteniendo como resultado final:

$$7x^2+4xy-3y^2+7x.$$

En la práctica, se escriben en fila los polinomios a sumar, de tal forma que las columnas contengan solo términos semejantes. El ejemplo anterior nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} 4x^2-2xy+2y^2+7x \\ 3x^2+6xy-5y^2 \\ \hline 7x^2+4xy-3y^2+7x, \end{array}$$

donde la tercera línea presenta el resultado después de reducir los términos semejantes.

Si tenemos en cuenta la definición de resta, el problema de restar dos polinomios se transforma en el problema de sumar dos polinomios.

Ejemplo 3.36

Efectuemos la siguiente resta de polinomios:

$$(5x^2+3xy-y^3)-(2x^2-4xy+1)$$

La resta anterior se convierte en la suma:

$$(5x^2+3xy-y^3)+(-2x^2+4xy-1),$$

que es igual a:

$$3x^2+7xy-y^3-1.$$

Puesto que la variable x representa un número real, así mismo un polinomio representa un número real. Así como los números reales se suman, restan, multiplican y dividen, los polinomios también se operan teniendo en cuenta las propiedades que satisfacen las operaciones de números reales.

En el polinomio que resulta al sumar o al restar dos polinomios, el coeficiente de x^k se obtiene sumando o restando los coeficientes que tiene x^k en los polinomios que se suman o restan, esto es, asociando términos semejantes.

Ejemplo 3.37

$$\begin{aligned}&\left(4+6x^2+7x^3-10x^5\right)+\left(3+x+4x^2+x^3\right)\\&\quad=(4+3)+(0+1)x+(6+4)x^2+(7+1)x^3+(0+0)x^4+(-10+0)x^5\\&\quad=7+x+10x^2+8x^3-10x^5\end{aligned}$$

Ejemplo 3.38

$$
\begin{aligned}
&\left(3-4x+5x^2-9x^3\right)-\left(-2+9x-9x^3\right)\\
&\quad=(3-(-2))+(-4-9)x+(5-0)x^2+(-9-(-9))x^3\\
&\quad=5-13x+5x^2
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.39

$(-2+x)-(-2+x)=(-2+x)+(2-x)=0$

De forma más general,, supuesto que $n \geq m$

$$
\begin{aligned}
&(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)\pm(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)\\
&\quad=(a_0\pm b_0)+(a_1\pm b_1)x+(a_2\pm b_2)x^2+\cdots+(a_m\pm b_m)x^m+a_{m+1}x^{m+1}\\
&\qquad+\cdots+a_nx^n
\end{aligned}
$$

o si $n<m$

$$
\begin{aligned}
&(a_0+a_1x+\quad+a_nx^n)\pm(b_0+b_1x+\quad+b_mx^m)\\
&\quad=(a_0\pm b_0)+(a_1\pm b_1)x+\quad+(a_n\pm b_n)x^n+b_{n+1}x^{n+1}+\quad+b_mx^m
\end{aligned}
$$

Note que la suma o la diferencia de dos polinomios puede dar el polinomio 0, pero si no es así, el grado del polinomio obtenido es menor o igual que el mayor entre los grados de los polinomios que se suman o se restan.

Multiplicación de polinomios

La multiplicación de polinomios está basada en la aplicación repetida de la propiedad distributiva y la utilización de la ley de los exponentes:

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

con m y n enteros positivos.

- $(5x^2y^3)(-3x^4y^2)=-15x^6y^5$
-
$$
\begin{aligned}
(3x+2y)(2x^2-xy+y)&=3x(2x^2-xy+y)+2y(2x^2-xy+y)\\
&=(6x^3-3x^2y+3xy)+(4x^2y-2xy^2+2y^2)\\
&=6x^3+x^2y+3xy-2xy^2+2y^2
\end{aligned}
$$

En la práctica se procede como se indica en la siguiente ilustración:

$$\begin{array}{l}
2x^2 \; -xy \quad +y \\
\;3x \;\; +2y \\
\hline
6x^3 - 3x^2y + 3xy \\
\qquad +4x^2 \qquad\quad -2xy^2 \;\; 2y^2 \\
\hline
6x^3 + x^2y + 3xy - 2xy^2 + 2y^2.
\end{array}$$

La tercera línea se obtiene multiplicando cada término de la primera línea por $3x$ y la cuarta línea, multiplicando cada término de la primera línea por $2y$. Finalmente, sumando las filas tercera y cuarta se obtiene el resultado, que es la última fila.

Un caso particularmente importante es el de la multiplicación de dos polinomios en la misma variable. En este caso es conveniente ordenar los polinomios de tal forma que el exponente de la variable vaya decreciendo.

Ejemplo 3.40

Efectuemos el siguiente producto de polinomios:

$$(2x^3 - 3x^2 + x - 7)(x^4 - 6x^2 + 1)$$

Tenemos:

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & & & 2x^3 & -3x^2 & +x & -7 \\
 & & & & x^4 & -6x^2 & +1 & \\
\hline
2x^7 & -3x^6 & +x^5 & -7x^4 & & & & \\
 & & -12x^5 & +18x^4 & -6x^3 & +42x^2 & & \\
 & & & & +2x^3 & -3x^2 & +x & -7 \\
\hline
2x^7 & -3x^6 & -11x^5 & +11x^4 & -4x^3 & +39x^2 & +x & -7
\end{array}$$

Ejemplo 3.41

$$\begin{aligned}
&\left(2+6x-3x^2\right)\left(3-2x+4x^3\right) \\
&\quad = 2\left(3-2x+4x^3\right)+6x\left(3-2x+4x^3\right)-3x^2\left(3-2x+4x^3\right) \\
&\quad = 2*3+2(-2x)+2(4x^3)+(6x)3+6x(-2x)+6x(4x^3)+(-3x^2)3 \\
&\qquad +(-3x^2)(-2x)+(-3x^2)(4x^3) \\
&\quad = 6+(-4+18)x+(-12-9)x^2+(8+6)x^3+24x^4-12x^5 \\
&\quad = 6+14x-21x^2+14x^3+24x^4-12x^5
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.42

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2}{3}+4x-\frac{3}{4}x^3\right)\left(6+x+\frac{9}{2}x^2\right)\\
&\quad=\frac{2}{3}\left(6+x+\frac{9}{2}x^2\right)+4x\left(6+x+\frac{9}{2}x^2\right)-\frac{3}{4}x^3\left(6+x+\frac{9}{2}x^2\right)\\
&\quad=4+\left(\frac{2}{3}+24\right)x+(3+4)x^2+\left(18-\frac{9}{2}\right)x^3-\frac{3}{4}x^4-\frac{27}{8}x^5\\
&\quad=4+\frac{74}{3}x+7x^2+\frac{27}{2}x^3-\frac{3}{4}x^4-\frac{27}{8}x^5
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.43

$$\left(1-\sqrt{2}x\right)\left(1+\sqrt{2}x\right)=1-2x^2$$

N Note que el coeficiente principal del polinomio producto es el producto de los coeficientes principales (que son números diferentes de cero) de los polinomios cuyo producto se está efectuando. Más generalmente, tenemos que:

$$(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)=c_0+c_1x+\cdots+c_{n+m}x^{n+m}$$

donde:

$$c_k=\sum_{i+j=k}^{m+n}a_ib_j.$$

- $5x^3-3x^2+6x+8$ y $x^7+2x^4-3x^2-\sqrt{3}x$ son polinomios en una variable.
- $3xy^2-\frac{2}{5}xy+x-\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}x^3y^2-3x^2y^2+4xy-8y+1$ son polinomios en dos variables.

Observamos que los únicos exponentes que aparecen en las variables son enteros positivos. Los exponentes negativos y fraccionarios están excluidos. Sin embargo, los coeficientes numéricos son números reales arbitrarios o elementos arbitrarios del dominio en consideración.

Definición 3.18 ***Grado de una variable***

Llamamos *grado de una variable* en un término de un polinomio al exponente que tiene la variable en el término.

Ejemplo 3.44

En el término $3x^4y^3$, el grado de x es 4 y el grado de y es 3.

Definición 3.19 ***Grado de un término***

grado de un término en dos o mas variables es la suma de los grados de las variables que aparecen en el término.

Ejemplo 3.45

El grado del término en dos variables $3x^4y^3$ es 7.

Definición 3.20 ***Grado de un polinomio***

El *grado de un polinomio* en ciertas variables es el mayor de los grados de esas variables en los términos del polinomio.

Ejemplo 3.46

$7x^5 - 2x^3 + 3x + 1$ es un polinomio de grado 5 en x.

Ejemplo 3.47

$4x^3y^2 - 5xy^3 + x^4y^2 + 2y$ es un polinomio de grado 4 en x, grado 3 en y y de grado 6 en x y y.

División de polinomios

En cuanto a la división, tenemos el principio de la división euclidiana. De acuerdo con este, dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ con $q(x) \neq 0$, al dividir $p(x)$ por $q(x)$, se obtienen dos polinomios: un cociente $c(x)$ y un residuo $r(x)$ tales que:

$$\begin{aligned} &p(x) = q(x)c(x) + r(x) \quad \text{y} \\ &r(x) = 0 \quad \text{o} \quad r(x) \neq 0, \quad \text{su grado es menor que el grado de } q(x). \end{aligned}$$

Los polinomios $c(x)$ y $r(x)$ son únicos. Estos polinomios se obtienen mediante el proceso llamado *división larga*.

Consideremos por ejemplo,

$$\begin{aligned} p(x) &= 4 + 3x - 2x^2 + 3x^3 + 6x^4 \\ q(x) &= 1 + x + 4x^2 \end{aligned}$$

O escritos en orden descendente de los exponentes de x,

$$\begin{aligned} p(x) &= 6x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 4 \\ q(x) &= 4x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

Al dividir $p(x)$ por $q(x)$ obtenemos:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
6x^4 & +3x^3 & -2x^2 & +3x & +4 & \quad \begin{array}{|l} 4x^2 \ +x \ +1 \\ \hline \frac{3}{2}x^2+\frac{3}{8}x-\frac{31}{32} \end{array} \\
-6x^4 & -\frac{3}{2}x^3 & -\frac{3}{2}x^2 & & & \\
\cline{1-3}
 & \frac{3}{2}x^3 & -\frac{7}{2}x^2 & & & \\
 & -\frac{3}{2}x^3 & -\frac{3}{8}x^2 & -\frac{3}{8}x & & \\
\cline{2-4}
 & & -\frac{31}{8}x^2 & +\frac{21}{8}x & & \\
 & & \frac{31}{8}x^2 & +\frac{31}{8}x & +\frac{31}{32} & \\
\cline{3-5}
 & & & \frac{115}{32}x & +\frac{159}{32} &
\end{array}
$$

donde el cociente es

$$c(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{31}{32}$$

y el residuo es:

$$r(x) = \frac{115}{32}x + \frac{159}{32}$$

Tenemos, efectivamente, que:

$$
\begin{aligned}
q(x)c(x) + r(x) &= \left(4x^2 + x + 1\right)\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{31}{32}\right) + \left(\frac{115}{32}x + \frac{159}{32}\right) \\
&= \left(6x^4 + 3x^3 - 2x^2 - \frac{19}{32}x - \frac{31}{32}\right) + \left(\frac{115}{32}x + \frac{159}{32}\right) \\
&= 6x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 4 = p(x)
\end{aligned}
$$

Veamos otros casos:

1. Sean:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= x^2 + x + 1 \\
q(x) &= 2x^3 - x^2 + x - 1
\end{aligned}
$$

Tenemos la igualdad:

$$x^2 + x + 1 = \left(2x^3 - x^2 + x - 1\right) \cdot 0 + \left(x^2 + x + 1\right)$$

Es decir, el cociente es el polinomio 0 y el residuo es el polinomio $p(x)$. Este ejemplo ilustra el caso en que $p(x) = 0$ o el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$: como cociente basta tomar 0 y como residuo, el mismo polinomio que se está dividiendo.

2.

$$\begin{aligned} p(x) &= 5x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x + 2 \\ q(x) &= x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
5x^4 & +3x^3 & -x^2 & +3x & +2 & x \quad -2 \\ \cline{6-6}
-5x^4 & +10x^3 & & & & 5x^3+13x^2+25x+53 \\ \cline{1-2}
 & 13x^3 & & & & \\
 & -13x^3 & +26x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 25x^2 & & & \\
 & & -25x^2 & +50x & & \\ \cline{3-4}
 & & & 53x & & \\
 & & & -53x & +106 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 108 &
\end{array}$$

Así, el cociente es $c(x) = 5x^3 + 13x^2 + 25x + 53$; el residuo es $r(x) = 108$. También, en este caso:

$$\begin{aligned} q(x)c(x) + r(x) &= (x-2)(5x^3 + 13x^2 + 25x + 53) + 108 \\ &= 5x^4 + (13 - 2 \times 5)x^3 + (25 - 2 \times 13)x^2 \\ &\quad + (53 - 2 \times 25)x + (108 - 2 \times 53) \\ &= 5x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

Observemos los dos últimos renglones: el coeficiente principal de $p(x)$, que es 5, y el coeficiente principal del cociente coinciden, puesto que el coeficiente principal de $q(x)$ es 1. Los demás coeficientes de $p(x)$ se obtienen al realizar las operaciones $q(x)c(x) + r(x)$. Así 3, el coeficiente de x^3 en $p(x)$, es igual a 13, que es el coeficiente de x^2 en $c(x)$, menos 2 veces 5, que es el coeficiente de x^3 de $c(x)$. El coeficiente de x^2 en $p(x)$, esto es -1, es igual a 25, que es el coeficiente de x en $c(x)$, menos 2 veces 13 que es el coeficiente de x^2 en $c(x)$. El coeficiente de x en $p(x)$, es decir 3, es igual a 53, que es el término independiente de $c(x)$, menos 2 veces 25, que es el coeficiente de x en $c(x)$. Finalmente, el término independiente de $p(x)$, es decir 2, es igual a 106, que es el residuo $r(x)$, menos 2 veces 53, que es el término independiente de $c(x)$.

Esto nos permite expresar los coeficientes del cociente así:

- El coeficiente principal, coeficiente de x^3, es igual al coeficiente principal de $p(x)$.
- El coeficiente de x^2 en $c(x)$ es igual al coeficiente de x^3 en $p(x)$ más 2 veces el coeficiente de x^3 en $c(x)$.
- El coeficiente de x en $c(x)$ es igual al coeficiente de x^2 en $p(x)$ más 2 veces el coeficiente de x^2 en $c(x)$.
- El término independiente de $c(x)$ es igual al coeficiente de x en $p(x)$ más 2 veces el coeficiente de x en $c(x)$.

- El residuo $r(x)$ es igual al término independiente de $p(x)$ más 2 veces el término independiente de $c(x)$.

Asimismo, en este caso, podemos hacer un análisis más general: al dividir un polinomio $p(x)$ de grado n por uno de grado 1 de la forma $x-d$, se obtiene un cociente cuyo grado es $n-1$ y un residuo que es 0 o un polinomio de grado 0, en otras palabras, una constante. Si:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \\ c(x) &= b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_0 \qquad \text{y} \\ r(x) &= k \end{aligned}$$

la igualdad:

$$p(x) = (x-d)c(x) + r(x),$$

es decir,

$$\begin{aligned} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 &= (x-d)(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0) + k \\ &= b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - db_{n-1})x^{n-1} \\ &\quad + (b_{n-3} - db_{n-2})x^{n-2} + \cdots \\ &\quad + (b_0 - db_1)x + (k - db_0), \end{aligned}$$

implica:

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} \\ a_{n-1} &= b_{n-2} - db_{n-1} \\ a_{n-2} &= b_{n-3} - db_{n-2} \\ a_1 &= b_0 - db_1 \\ a_0 &= k - db_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= a_{n-1} + db_{n-1} \\ b_{n-3} &= a_{n-2} + db_{n-2} \\ &\vdots \\ b_0 &= a_1 + db_1 \\ k &= a_0 + db_0 \end{aligned}$$

De este modo, tomando una fila formada por todos los coeficientes de $p(x)$ en orden $a_n a_{n-1} \ldots a_0$ y sumando 0 a a_n y así sucesivamente a cada uno de los demás coeficientes $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$, el producto de d por la última suma, se obtienen, en orden, los coeficientes del cociente y el residuo.

$$\begin{array}{cccccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ 0 & db_{n-1} & db_{n-2} & \cdots & db_1 & db_0 \\ \hline b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & k \end{array}$$

En esto consiste la *división sintética*. En ese orden de ideas, para obtener el cociente de dividir $7x^5+4x^3+3x^2-x-6$ por $x+1$, tenemos en cuenta que $x+1=x-(-1)$ y procedemos así:

$$\begin{array}{cccccc} 7 & 0 & -4 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -7 & 7 & -3 & 0 & 1 \\ \hline 7 & -7 & 3 & 0 & -1 & -5 \end{array}$$

El cociente es, entonces, $c(x)=7x^4-7x^3+3x^2-1$ y el residuo es $r(x)=-5$.

Volviendo a la discusión general acerca de la división, cuando, el divisor es de forma $x-d$, el residuo es una contante k y

$$p(x)=(x-d)c(x)+k$$

Entonces, al calcular $p(x)$ en d (es decir, al reemplazar x por d en el polinomio y realizar las operaciones indicadas), obtenemos:

$$\begin{aligned} p(d)&=(d-d)c(d)+k \\ &=0+k=k \end{aligned}$$

De esta manera hemos demostrado el *teorema del residuo*:

Teorema 3.1 ***Teorema del residuo***

El residuo de dividir un polinomio $p(x)$ por el polinomio $x-d$ es $p(d)$.

1. Al evaluar el polinomio

   $$p(x)=2+3x-x^2+3x^3+5x^4 \quad \text{en} \quad x=2$$

   obtenemos:

   $$\begin{aligned} p(2)&=2+3*2-2^2+3*2^3+5-2^4 \\ &=108 \end{aligned}$$

   y este es el residuo de dividir $p(x)$ por $x-2$, como fue visto antes.
2. Podemos asegurar que el residuo de dividir $p(x)=-6-x+3x^2+4x^3+7x^5$ por $x+1$ es $-5=p(-1)$. Este resultado también fue hallado por división sintética antes.

Como un caso particular del teorema del residuo, aparece el *teorema del factor*

Teorema 3.2 ***Teorema del factor***

El polinomio $x-d$ es factor del polinomio $p(x)$ si y solo si $p(d)=0$.

Demostración. Como $p(x)=(x-d)c(x)+p(d)$, $x-d$ es factor del $p(x)$ si y solo si $p(d)=0$. ■

Ejemplo 3.48

El residuo de la operación $(4x^3-6-7x^2)\div(x-2)$, aplicando el teorema anterior se puede calcular de la siguiente manera: Sea $P(x)=4x^3-6-7x^2$ y $a=2$; entonces

$$\begin{aligned} P(2) &= 4(2)^3-6-7(2)^2 \\ &= 4(8)-6-7(4) \\ &= 32-6-28 \\ &= -2 \end{aligned}$$

lo cual corresponde con la operación efectuada en el ejemplo 3.8.2

Ejemplo 3.49

Halla el residuo de la operación $(2x^3-5x^2-30x+11)\div(x+3)$. Sea $P(x)=2x^3-5x^2-30x+11$ y $a=-3$, entonces:

$$\begin{aligned} P(-3) &= 2(-3)^3-5(-3)^2-30(-3)+11 \\ &= 2(-27)-5(9)+90+11 \\ &= -54-45+101 \\ &= 2 \end{aligned}$$

En concordancia con el ejemplo 3.8.2.

División sintética o regla de Ruffini

Es un método rápido y exacto para dividir un polinomio $P(x)$ entre un polinomio lineal de la forma $x-a$. El método se describe en la forma siguiente:

- Se colocan los coeficientes de $P(x)$ en orden descendente de las potencias de x, colocando cero como coeficiente de cada potencia que no aparezca.
- Después de escribir el divisor en la forma $x-a$, se usa a para generar la segunda y la tercera fila, así: se baja el primer coeficiente del dividendo y se multiplica por a.
- Se suma el producto al segundo coeficiente del dividendo, se multiplica esa suma por a y se suma al tercer coeficiente del dividendo.
- El proceso se sigue hasta que un producto se suma al término constante del dividendo.
- El último número de la tercera fila es el residuo; los otros números de la tercera fila son los coeficientes del cociente, que es de un grado menor que $P(x)$.

Ejemplo 3.50

Al realizar la división $4x^3 - 6 - 7x^2$ entre $x - 2$, obtenemos:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & -7x^2 & & -6 & x-2 \\ \cline{5-5}
-4x^3 & +8x^2 & & & 4x^2+x+2 \\ \cline{1-2}
 & x^2 & & -6 & \\
 & -x^2 & +2x & & \\ \cline{2-3}
 & & 2x & -6 & \\
 & & -2x & +4 & \\ \cline{3-4}
 & & & -2 &
\end{array}
$$

Aplicando la regla *Ruffini* o *división sintética*, nos queda que:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4 & -7 & 0 & -6 & -2 \\
 & 8 & 2 & 4 & \\ \hline
4 & 1 & 2 & -2 &
\end{array}
$$

Por lo tanto, el cociente es $Q(x) = 4x^2 + x + 2$ y el residuo es $R = -2$, igual que en la anterior división.

Ejemplo 3.51

Realiza la siguiente división utilizando la división sintética $(2x^3 - 5x^2 - 30x + 11) \div (x + 3)$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & -5 & 30 & 11 & -3 \\
 & -6 & 33 & -9 & \\ \hline
2 & -11 & 3 & 2 &
\end{array}
$$

Cociente $2x^2 - 11x + 3$, residuo 2.

Ejemplo 3.52

Realiza la siguiente división utilizando la división sintética $(2x^4 - 3x - 5) \div (x + 1)$.

$$\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 0 & 0 & -3 & -5 & -1 \\ & -2 & 2 & -2 & 5 & \\ \hline 2 & -2 & 2 & -5 & 0 & \end{array}$$

Cociente $2x^3 - 2x^2 + 2x - 5$, residuo 0.

Ejercicios 3.2

1. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas procurando que los exponentes estén expresados como números positivos y se eliminen los símbolos radicales.
    a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$
    b) $\left(\frac{a^3b^{-5}}{ab^{-2}c^{-2}}\right)^{-2}$
    c) $\left(4m^3n^{-3}p^{-1}\right)^2$
    d) $\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{5}{2}}$
    e) $\frac{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[6]{x^{13}}}$
    f) $\left(\frac{a^4m^{-6}n^2}{5na^{-\frac{1}{2}}}\right)$
    g) $\left(\frac{3456p^{-8}w^{-6}n^2}{5a^{-\frac{1}{2}}b^5}\right)^0$
    h) $\left(\frac{50625x^8}{y^6}\right)^{-\frac{1}{8}}$
2. Realiza las operaciones que se indican entre polinomios teniendo en cuenta que:
    - $P(x) = 4x^2 - 1$
    - $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$
    - $R(x) = 6x^2 + x + 1$
    - $S(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$
    - $T(x) = \frac{3}{2}x^2 + 5$
    - $U(x) = x^2 + 2$

a) $P(x)+Q(x)$
b) $3Q(x)-S(x)$
c) $S(x)+T(x)+(x)$
d) $-T(x)+U(x)+6S(x)$
e) $2P(x)-R(x)$
f) $2S(x)-\frac{3}{2}T(x)$

3. Realiza las operaciones que se indican
   a) $\left(x^4-2x^2-6x-1\right)\left(x^2-2x+3\right)$
   b) $\left(3x^2-5x\right)\left(2x^3+4x^2-x+2\right)$
   c) $\left(2x^2-5x+6\right)\left(3x^4-5x^3-6x^2+4x-3\right)$
   d) $\dfrac{x^4-2x^3-11x^2+30x-20}{x^2+3x-2}$
   e) $\dfrac{x^6+5x^4+3x^2-2x}{x^2-x+3}$
   f) $\dfrac{x^5+2x^3-x-8}{x^2-2x+1}$
   g) $\dfrac{x^3+2x+70}{x+4}$
   h) $\dfrac{x^5-32}{x-2}$
   i) $\dfrac{x^4-3x^2+2}{x-3}$
4. Comprueba que los siguientes polinomios tienen como factores los que se indican.
   a) (x^3+5x+1) tiene por factor $(x-3)$
   b) (x^6-1) tiene por factor $(x+1)$
   c) $(x^{10}-1024)$ tiene por factor $(x+2)$
5. El perímetro de un polígono esta dado por la suma de todo sus lados. Halla el perímetro del exágono de la figura 3.3

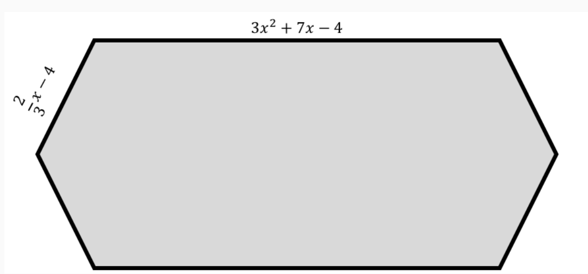


Figura 3.3: En geometría plana elemental, un hexágono o *exágono* (esta última versión sin *h* está en desuso, ya no está recogida en el DRAE) es un polígono de seis lados y seis vértices.

6. El área de un rectángulo está dada por el producto de sus dimensiones. Halla el área del rectángulo de la figura 3.4,

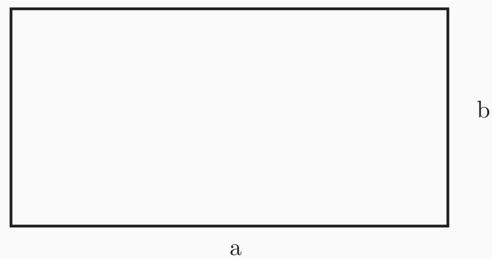


Figura 3.4: En geometría plana, un rectángulo es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí. Los lados opuestos tienen la misma longitud.

7. El volumen de un paralelepípedo, como el de la figura 3.5, está dado por área de la base por la altura, es decir: $V = A_B H$. Si el volumen es $V = x^5 - 1$ y la altura $H = x - 1$, halla el área de la base, A_B.

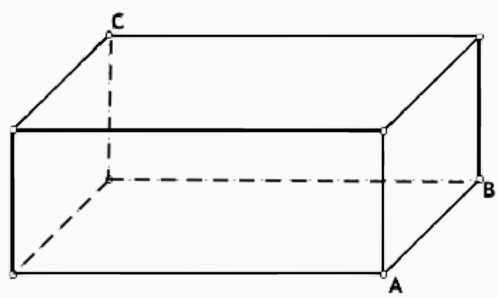
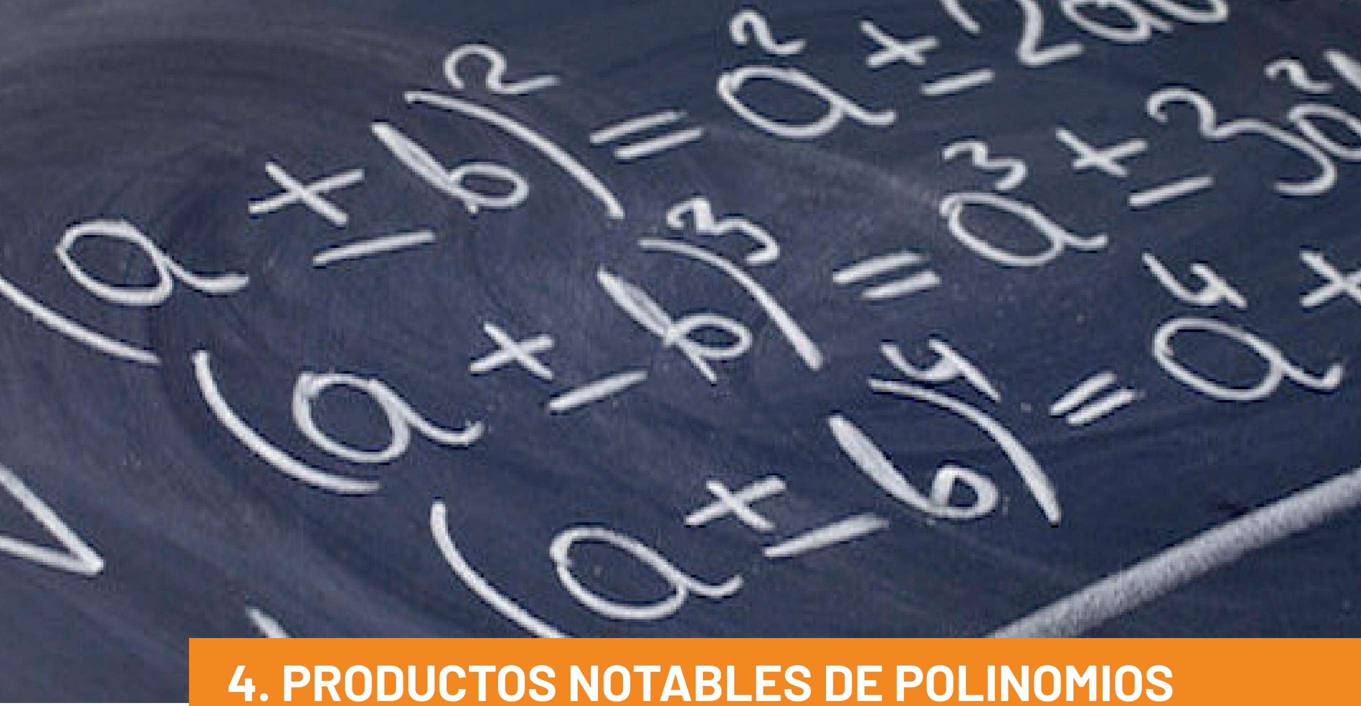


Figura 3.5: Paralelepípedo: Cuerpo geométrico formado por seis paralelogramos, de los cuales son iguales y paralelos los opuestos entre sí.

8. Halla a y b para que el polinomio $x^5 + ax + b$ sea divisible por $x^2 - 4$.
9. Determina los coeficientes de a y b para que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + 5$ sea divisible por $x^2 + x + 1$.
10. Encuentra el valor de k para que al dividir $2x^2 + kx + 2$ por $x - 2$, dé de resto 4.
11. Determinar el valor de m para que $3x^2 + mx + 4$ admita $x = 1$ como una de sus raíces.



4. PRODUCTOS NOTABLES DE POLINOMIOS

Los siguientes productos se utilizan con tanta frecuencia en álgebra que no solo merecen destacarse sino que es aconsejable memorizarlos. Se conocen con el nombre de *productos notables*.

La validez de los productos anteriores se comprueba fácilmente realizando las multiplicaciones correspondientes. Las letras que intervienen en las fórmulas pueden reemplazarse por expresiones algebraicas arbitrarias.

4.1 Cuadrado de un binomio

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

El *Cuadrado de un binomio* es equivalente al cuadrado del primer término, más (o menos según la operación entre los términos) el doble del producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término.

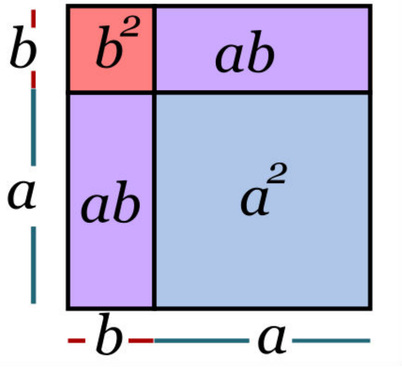


Figura 4.1: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a^2+ab+ba+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

De forma análoga, realizamos los mismos pasos si tenemos $(a-b)^2$.

Ejemplo 4.1

$$\begin{aligned}(7m+1)^2 &= (7m)^2+2(7m)(1)+(1)^2\\ &= 49m^2+14m+1\end{aligned}$$

Ejemplo 4.2

$$\begin{aligned}(3x-5y)^2 &= (3x)^2-2(3x)(5y)+(5y)^2\\ &= 9x^2-30xy+25y^2\end{aligned}$$

4.2 Producto de la suma por la diferencia de dos términos

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

El producto de la suma por la diferencia de dos términos es equivalente a la diferencia entre el cuadrado del primer término y el cuadrado del segundo término.

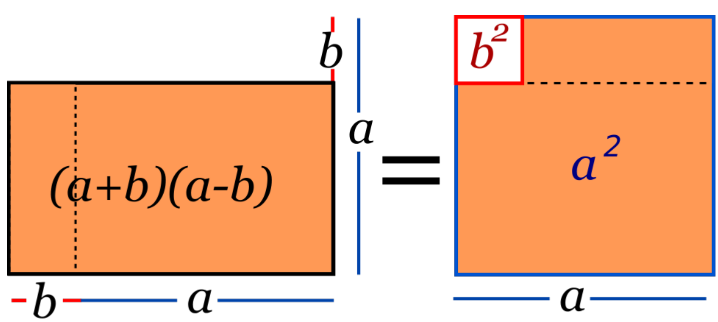


Figura 4.2: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2-ab+ab-b^2\\ &= a^2-b^2\end{aligned}$$

Ejemplo 4.3

$$\begin{aligned}(7m+3n)(7m-3n) &= (7m)^2-(3n)^2\\ &= 49m^2-9n^2\end{aligned}$$

Ejemplo 4.4

$$\begin{aligned}\left(9x-\frac{1}{5}\right)\left(9x+\frac{1}{5}\right) &= (9x)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2\\ &= 81x^2-\frac{1}{25}\end{aligned}$$

4.3 Productos de dos binomios con un término común

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

El producto de la forma $(x+a)(x+b)$ es equivalente al cuadrado del término común más el producto de dicho término por la suma de los no comunes más el producto de los términos no comunes .

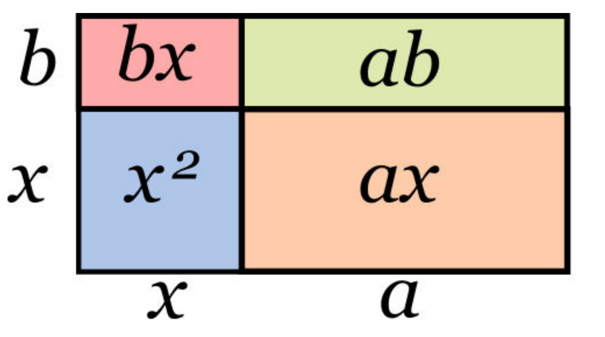


Figura 4.3: $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

Ejemplo 4.5

$$\begin{aligned}(y+8)(y-3) &= y^2+(8-3)y+8(-3)\\ &= y^2+5y-24\end{aligned}$$

Ejemplo 4.6

$$\begin{aligned}(3m-5)(3m+9) &= (3m)^2+(-5+9)(3m)+(-5)(9)\\ &= 9m^2+4(3m)-45\\ &= 9m^2+12m-45\end{aligned}$$

4.4 Cubo de un binomio

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

El cubo de un binomio es equivalente al cubo del primer número, más el triple del producto del cuadrado del primer número por el segundo, más el triple del producto del primer número por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

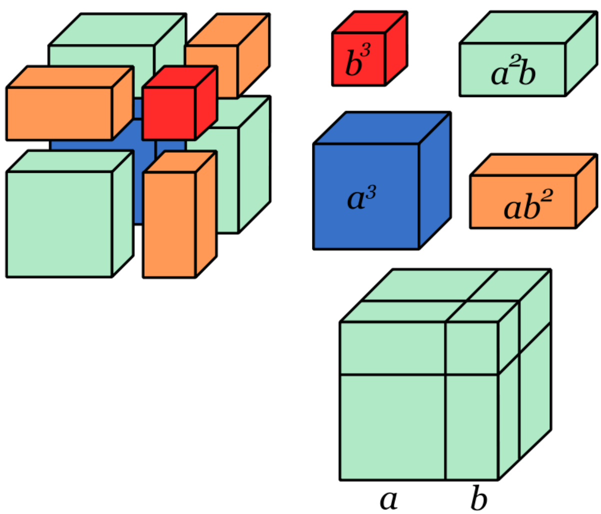


Figura 4.4: $(a+b)^2 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^2a+a^2b+2aba+2abb+b^2a+b^2b\\ &= a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+2b^2a+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

Ejemplo 4.7

Al desarrollar $(x+2)^3$, tenemos

- Cubo del primer número: $(x)^3$.
- Triple del producto del cuadrado del primer número por el segundo: $3x^2 2 = 6x^2$.
- Triple del producto del primer número por el cuadrado del segundo: $3x2^2 = 12x$.
- Cubo del segundo número: $2^3 = 8$.

Así pues $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

Ejemplo 4.8

Al desarrollar $(3x+2y)^3$, tenemos:

- Cubo del primer número: $(3x)^3 = 27x^3$.
- Triple del producto del cuadrado del primer número por el segundo: $3(3x)^2 2y = 3(9x^2)2y = 54x^2y$.
- Triple del producto del primer número por el cuadrado del segundo: $3(3x)(2y)^2 = 9x(4y^2) = 36xy^2$.
- Cubo del segundo número: $(2y)^3 = 8y^3$.

Así pues $(3x+2y)^3 = 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$.

En resumen:

1. $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
2. $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$
3. $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$
4. $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

Ejemplo 4.9

$$
\begin{aligned}
(3\sqrt{x+y} - 2\sqrt{x})(3\sqrt{x+y} + 2\sqrt{x}) &= (3\sqrt{x+y)})^2 - (2\sqrt{x})^2 \\
&= 9(x+y) - 4x = 5x - 9y
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.10

$$
\begin{aligned}
(3t^2 + 4s)^2 &= (3t^2)^2 + 2(3t^2)(4s) + (4s)^2 \\
&= 9t^4 + 24t^2s + 16s^2
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.11

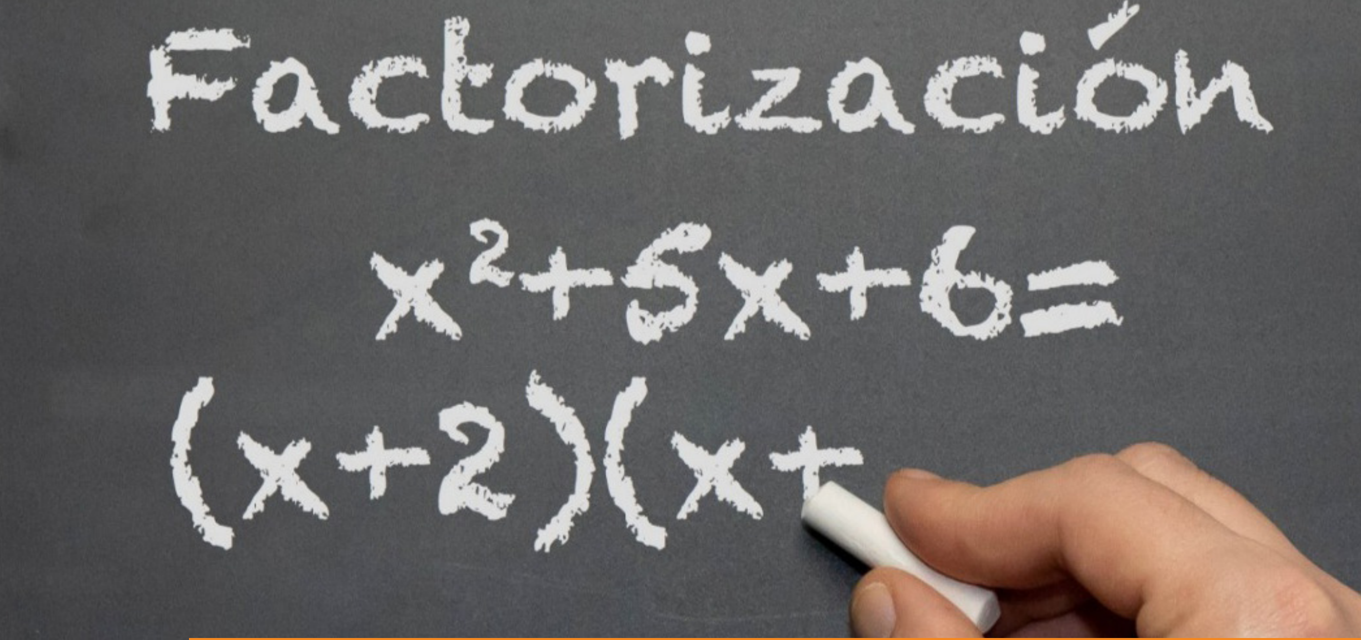
$$\begin{aligned}
(a+b-c)^3 &= [(a+b)-c]^3 \\
&= (a+b)^3-3(a+b)^2c+3(a+b)c^2-c^3 \\
&= (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-3(a^2+2ab+b^2)c+3ac^2+3bc^2-c^3 \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2-c^3
\end{aligned}$$

Obsérvese que se considera $(a+b)$ como un solo término.

Ejercicios 4.1

1. Realiza las siguientes divisiones aplicando las regla de Ruffini y escribe el cociente y el residuo de la división.
   a) $(4x^3-8x^2-9x+7)\div(x-3)$
   b) $(5x^5-7x^4+3x^3-5x^2+3x-1)\div(x+1)$
   c) $(6x^4+9x^3-10x^2+8x-2)\div(x-2)$
   d) $(x^3-1)\div(x-1)$
   e) $(x^4+1)\div(x+1)$
   f) $(4x^5-3x^2+2x+7)\div(x+4)$
   g) $(5x^6-x^4+2x^3-2x^2+3x-1)\div(x-1)$
   h) $(x^6+x^3+x)\div(x+1)$
   i) $(x^6-1)\div(x-1)$
   j) $(x^8+1)\div(x+1)$
2. Utiliza el teorema del residuo para calcular el residuo de estas divisiones.
   a) $(x^{11}-2x^2)\div(x-1)$
   b) $(x^7-1)\div(x-1)$
   c) $(-x^{14}+101)\div(x+1)$
3. En la división del polinomio $P(x)=x^3+2x^2+k$ entre $x-3$, el residuo da como resultado 0. ¿Cuánto vale k ?
4. Halla cada producto empleando la fórmula correspondiente.
   a) $(2a+3)^2$
   b) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$
   c) $(2m-y^3)^3$
   d) $\left(7\frac{x}{y}-5\right)\left(7\frac{x}{y}+2\right)$
   e) $\left(\frac{2}{3}mn^2-8y\right)^2$
   f) $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{5}\right)^3$
   g) $\left(\frac{4}{5}m+3n^2\right)^3$
   h) $(u-6)(u-9)$
   i) $\left(\frac{1}{2}-5\right)\left(\frac{1}{2}+3\right)$
   j) $(mn-p)(mn+p)$

k) $\left(\frac{p^5}{5}+3n^2\right)^2$
l) $(a-3)^2$
m) $\left(7\frac{x}{y}-5\right)\left(7\frac{x}{y}+5\right)$
n) $(3m^n-2)(3m^n+2)$
ñ) $(3m^n-3)(3m^n+6)$
o) $\left(\frac{5}{z}-1\right)^3$



5. FACTORIZACIÓN

Definición 5.1 ***Factorización***
Factorizar una expresión algebraica es expresarla como producto de expresiones más simples llamadas *factores* de la expresión original.

En general la factorización de expresiones algebraicas puede ser muy complicada y nos limitaremos estudiar algunos casos sencillos, que se derivan de las fórmulas de los productos notables cuando se leen de derecha a izquierda.

5.1 Factor común

Factor común monomio y polinomio

Para hallar el factor *común polinomio* de un polinomio se encuentra el máximo factor común polinomio de los términos y se aplica la propiedad distributiva en sentido contrario. Para hallar los factores comunes de monomios, debemos encontrar el máximo común divisor de los coeficientes y escoger las letras comunes con el menor exponente.

Ejemplo 5.1

¿Cuál es el factor común de $18x^2y^3z$ y $24x^4y^2z$?

- Descomponemos en factores primos a 18 y 24 y hallamos el máximo común divisor $(m.c.d)$
  $18 = 3^2$ y $24 = 2^3 \cdot 3$, por lo tanto el $m.c.d = 2 \cdot 3 = 6$
- Descomponemos la parte literal de los monomios y hallamos el máximo común divisor. La parte literal común de menor exponente es x^2y^2z.
- De este modo, $6x^2y^2z$ es el factor común de los monomios dados.

Ejemplo 5.2

Factoricemos el polinomio $x^2yz + xy^2z + xyz^2$. Todos los términos del polinomio tienen en común un término de la forma xyz; entonces, el polinomio factorizado queda:

$$xyz(x+y+z)$$

Ejemplo 5.3

Factoricemos el polinomio $5x(x^2+1)^{-}4y(x^2+1) - 9(x^2+1)$. El factor común es x^2+1, entonces, la expresión factorizada queda:

$$5x(x^2+1)^{-}4y(x^2+1) - 9(x^2+1) = (x^2+1)(5x-4y-9)$$

Ejemplo 5.4

Factoricemos:

a) $3x^3 - 6x + 9 = 3(x^3 - 2x + 3)$. El factor común es 3.
b) $(5x-2y)x^2 - (5x-2y)6xy = (5x-2y)(x^2-6xy)$. El factor común es $5x-2y$.
c) $y^6 - y^4 = y^4(y^2-1)$. El factor común es y^4.
d) $18x^2 + 30x^3y = 6x^2(3+5xy)$.
e) $(x+1)^3x^2 + (x+y)^2(x+1)^2 = (x+1)^2\left[(x+1)x^2 + (x+y)\right] = (x+1)^2(x^3+x^2+x+y)$.
f) $5x(x+2) + (x+2) = (x+2)(5x+1)$.

5.2 Factor común por agrupación de términos

Para *factorizar agrupando términos*:

i) Se asocian términos que tengan un monomio común.
ii) Se factorizan estos términos buscando que queden polinomios comunes.
iii) Se factoriza el polinomio común.

Ejemplo 5.5

Factorizar el polinomio $x^3 - 9x - x^2 + 9$:

$$\begin{aligned} x^3 - 9x - x^2 + 9 &= x^3 - x^2 + 9 - 9x \\ &= x^2(x-1) + 9(1-x) \\ &= x^2(x-1) - 9(x-1) \\ &= (x-1)(x^2-9) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.6

Encontremos las dimensiones de un rectángulo de área x^4+3x^3+x+3.

$$\begin{aligned} x^4+3x^3+x+3 &= (x^4+3x^3)+(x+3) \\ &= x^3(x+3)+(x+3) \\ &= (x^3+1)(x+3) \end{aligned}$$

Entonces, podemos colocar Base $= x^3+1$ y Altura $= x+3$.

Ejemplo 5.7

Factorizar el polinomio $3m^2-6mn+4m-8n$:

$$\begin{aligned} 3m^2-6mn+4m-8n &= (3m^2-6mn)+(4m-8n) \\ &= 3m(m-2n)+4(m-2n) \\ &= (m-2n)(3m+4) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.8

Factorizar el polinomio $2x^2-4x-3xy+6y$:

$$\begin{aligned} 2x^2-4x-3xy+6y &= 2x^2-3xy-4x+6y \\ &= x(2x-3y)-2(2x-3y) \\ &= (2x-3y)(x-2) \end{aligned}$$

5.3 Trinomio cuadrado perfecto

$$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$$

Una cantidad es llamada *cuadrado perfecto* si es el cuadrado de otra cantidad, por ejemplo 64 es el cuadrado perfecto de 8 y $36x^2y4$ es el cuadrado de $6xy^2$. Un trinomio es cuadrado perfecto cuando es el cuadrado de un binomio, es decir, el producto de dos binomios iguales. Así, $a^2+2ab+b^2$ es el cuadrado perfecto de $a+b$ porque :

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$$

Definición 5.2 ***Trinomio cuadrado perfecto (TCP)***

Un trinomio cuadrático es Trinomio Cuadrado Perfecto o TCP si tiene dos términos positivos que son cuadrados perfectos y el otro término es el doble producto de las raíces de los términos cuadráticos.

Para factorizar un TCP, se procede de la siguiente forma:

1. Verificar que el trinomio es TCP
2. Tomar las raíces cuadradas positivas de los dos cuadrados perfectos positivos
3. formar el binomio de grado dos, que puede ser de la forma $(x-a)^2$ o $(x+a)^2$, según el otro término sea negativo o positivo, respectivamente

Ejemplo 5.9

Factorizar x^2-6x+9. El trinomio es TCP porque:

- La raíz cuadrada de x^2 es x.
- La raíz cuadrada de 9 es 3.
- El doble producto de estas raíces es $2(x)3 = 6x$.

Luego nos queda que:

$$x^2-6x+9 = (x-3)^2$$

Ejemplo 5.10

Factorizar $x^2+2\sqrt{5}x+5$. El trinomio es TCP porque:

- La raíz cuadrada de x^2 es x.
- La raíz cuadrada de 5 es $\sqrt{5}$.
- El doble producto de estas raíces es $2\sqrt{5}x$.

Luego nos queda que:

$$x^2+2\sqrt{5}x+5 = (x+\sqrt{5})^2$$

Ejemplo 5.11

Factorizar $4x^2-8xy+4y^2$. El trinomio es TCP porque:

- La raíz cuadrada de $4x^2$ es $2x$.
- La raíz cuadrada de $4y^2$ es $2y$.
- El doble producto de estas raíces es $2(2x)(2y) = 8xy$.

Luego nos queda que:

$$4x^2-8xy+4y^2 = (2x-2y)^2 = [2(x-y)]^2 = 2^2(x-y)^2 = 4(x-y)^2$$

Ejemplo 5.12

Factorizar $\frac{1}{4}-\frac{b}{3}+\frac{b^2}{9}$. El trinomio es TCP porque:

- La raíz cuadrada de $\frac{1}{4}$ es $\frac{1}{2}$.
- La raíz cuadrada de $\frac{b^2}{9}$ es $\frac{b}{3}$.

- El doble producto de estas raíces es $2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{3}\right)=\frac{b}{3}$.

Luego nos queda que:

$$\frac{1}{4}-\frac{b}{3}+\frac{b^2}{9}=\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{3}\right)^2.$$

5.4 Diferencia de cuadrados

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

Para factorizar la diferencia de cuadrados, debemos extraer la raíz cuadrada positiva de cada cuadrado perfecto y formar los factores, uno con la suma de las raíces y el otro con su diferencia; es decir: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Ejemplo 5.13

Factorizar x^2-4:

- La raíz cuadrada de x^2 es x.
- La raíz cuadrada de 4 es 2.

Luego tenemos que:

$$x^4-4=(x-2)(x+2)$$

Ejemplo 5.14

Factorizar $1-x^2$:

- La raíz cuadrada de 1 es 1.
- La raíz cuadrada de x^2 es x.

Luego tenemos que:

$$1-x^2=(1-x)(1+x)$$

Ejemplo 5.15

Factorizar $\frac{1}{4}-\frac{b^2}{9}$.

- La raíz cuadrada de $\frac{1}{4}$ es $\frac{1}{2}$.
- La raíz cuadrada de $\frac{b^2}{9}$ es $\frac{b}{3}$.

Luego nos queda que:

$$\frac{1}{4}-\frac{b^2}{9}=\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{b}{3}\right)$$

Ejemplo 5.16

$$\begin{aligned} x^4-1 &= (x^2-1)(x^2+1) \\ &= (x-1)(x+1)(x^2+1) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.17

$16t^2-81r^2s^4=(4t)^2-(9rs^2)^2=(4t+9rs^2)(4t-9rs^2)$.

Ejemplo 5.18

$$\begin{aligned} \frac{9}{z^4}-25x^4 = \left(\frac{3}{z^2}\right)^2-(5x^2)^2 &= \left(\frac{3}{z^2}+5x^2\right)\left(\frac{3}{z^2}-5x^2\right) \\ &= \left(\frac{3}{z^2}+5x^2\right)\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{z}\right)^2-(\sqrt{5}x)^2\right) \\ &= \left(\frac{3}{z^2}+5x^2\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{z}+\sqrt{5}x\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{z}-\sqrt{5}x\right) \end{aligned}$$

5.5 Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción

Para factorizar por trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción se procede:

1. Se comprueba si el trinomio es cuadrado perfecto, extrayendo la raíz cuadrada al primer y tercer término; las raíces cuadradas de estos términos se multiplican por 2, y este producto se compara con el segundo término del trinomio dado.
2. Si el segundo término del trinomio no es igual al producto encontrado, no es cuadrado perfecto. En consecuencia, se procede a convertirlo en un trinomio cuadrado perfecto, de la siguiente manera:
3. Se le suma al segundo término la diferencia que falta para que sea igual a producto encontrado en la comprobación del trinomio; y además, para que el trinomio dado no varíe, se le resta esta misma diferencia a todo el trinomio.
4. Por último, se encuentra el resultado como en una diferencia de cuadrados perfectos.

Ejemplo 5.19

Factorar $x^4+x^2y^2+y^4$

- Comprobar si el trinomio es cuadrado perfecto:
  raíz cuadrada de $x^4=x^2$,

raíz cuadrada de $y^4 = y^2$.
El segundo término debiera ser $2(x^2)(y^2) = 2x^2y^2$, comparando segundo término $2x^2y^2 - x^2y^2 = x^2y^2$ lo que le falta

- Convirtiendo a trinomio cuadrado perfecto, sumando la diferencia que falta al segundo término y restando la misma diferencia al trinomio dado, así:
$$\begin{aligned} x^4+x^2y^2+y^4 &= x^4+x^2y^2+y^4+x^2y^2-x^2y^2 \\ &= x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2 \\ &= (x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2 \end{aligned}$$
- Factorando el trinomio cuadrado perfecto:
$$(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2 = (x^2+y^2)^2-x^2y^2$$
- Factorando la diferencia de cuadrados:
$$(x^2+y^2)^2-x^2y^2 = (x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$$

Si ordenamos, la solución sería $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

Ejemplo 5.20

Factorar a^4+a^2+1

- Se comprueba si es trinomio cuadrado perfecto:
raíz cuadrada de a^4 es a^2,
raíz cuadrada de 1 es 1.
El segundo término debe ser: $2(a^2)(1) = 2a^2$.
- Se comparan los 2 términos: $2a^2 - a^2 = a^2$ lo que falta.
- Se convierten a cuadrado perfecto (sumando lo que falta al segundo término y restando la diferencia que falta al trinomio dado):
$$\begin{aligned} a^4+a^2+1 &= a^4+a^2+1+a^2-a^2 \\ &= a^4+2a^2+1-a^2 \\ &= (a^4+2a^2+1)-a^2 \end{aligned}$$
- Factorando el trinomio cuadrado perfecto:
$$(a^4+2a^2+1)-a^2 = (a^2+1)^2-a^2$$
- Factorando como diferencia de cuadrados perfectos:
$$(a^2+1)^2-a^2 = (a^2+1+a)(a^2+1-a)$$

So ordenamos, quedaría así $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

5.6 Trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$

Reglas para factorizar un trinomio de esta forma:

- Se descompone el trinomio en dos factores binomios cuyo primer término será la raíz cuadrada del termino x^{2n}.
- El signo del primer binomio será el mismo signo que tenga el termino bx, el signo del segundo binomio será igual a la multiplicación de los signos de bx y de c.
- Si los dos factores tienen signos iguales entonces se buscan dos números cuya suma sea igual que el valor absoluto del factor b de bx y cuyo producto sea igual al valor absoluto del factor c, estos números son los segundos términos de los factores binomios.
- Si los dos factores tienen signos diferentes, entonces, se buscan dos números cuya diferencia sea igual que el valor absoluto del factor b de bx, y cuyo producto sea igual al valor absoluto del factor c; el mayor de estos números será el segundo término del primer factor binomio y el menor de estos números será el segundo término del segundo factor binomio.

Ejemplo 5.21

Factorizar $m^2 + 8m + 15$:

- Primer paso: $(m\ )(m\ )$.
- Segundo paso $(m+\ )(m+\ )$.
- Tercer paso $(m+3)(m+5)$.

Luego $m^2 + 8m + 15 = (m+3)(m+5)$.

Ejemplo 5.22

Factorizar $x^2 + 10x + 24$:

- Primer paso $(x\ )(x\ )$.
- Segundo paso $(x+\ )(x+\ )$.
- Tercer paso $(x+6)(x+4)$.

Entonces $x^2 + 10x + 24 = (x+6)(x+4)$.

Ejemplo 5.23

Factorizar $a^2m^4 + am^2 - 380$:

- Primer paso $(am^2\ )(am^2\ )$.
- Segundo paso $(am^2+\ )(am^2+\ )$.
- Tercer paso $(am^2+20)(am^2-19)$.

Entonces $a^2m^4 + am^2 - 380 = (am^2+20)(am^2-19)$.

Ejemplo 5.24

Factorizar $x^6 - 21x^3m + 98m^2$:

- Primer paso $(x^3\ )(x^3\ )$.
- Segundo paso $(x^3 -\ )(x^3 -\ )$.
- Tercer paso $(x^3 - 7m)(x^3 - 14m)$.

Luego $x^6 - 21x^3m + 98m^2 = (x^3 - 7m)(x^3 - 14m)$.

Ejemplo 5.25

Factorizar $x^4 - 2x - 24$:

- Primer paso $(x^2\ )(x^2\ )$.
- Segundo paso $(x^2 -\ )(x^2 +\ )$.
- Tercer paso $(x^2 - 6)(x^2 + 4)$.

Entonces $x^4 - 2x - 24 = (x^2 - 6)(x^2 + 4)$.

5.7 Trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$

Se procede a factorizar de la siguiente forma:

1. Una vez ordeado el trinomio se multiplica el primer coeficiente con el término independiente.
2. Se procede a conseguir dos números que multiplicados den el producto anterior y cuya suma sea el segundo término.
3. El segundo término se descompone en la suma de los dos términos hallados.
4. Se factoriza por factor común por agrupación de términos.

Ejemplo 5.26

Factorizar $2x^2 + 3x - 2$:

- Multiplicamos primer coeficiente (2) y término independiente (-2); $2(-2) = -4$.
- Hallamos dos números que multiplicados den -4 y sumados den 3; ellos son 4 y -1.
-
$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x - 2 &= 2x^2 + \overbrace{4x - x}^{3x} - 2 \\ &= (2x^2 + 4x) + (-x - 2) \\ &= 2x(x + 2) - (x + 2) \\ &= (x + 2)(2x - 1) \end{aligned}$$

  Es decir, $2x^2 + 3x - 2 = (x + 2)(2x - 1)$

Ejemplo 5.27

Factorizar $3x^2-5x-2$:

- Multiplicamos primer coeficiente (3) y el término independiente (-2); $3(-2)=-6$.
- Hallamos dos números que multiplicados den -6 y sumados den -5; ellos son -6 y 1.
- $$\begin{aligned} 3x^2-5x-2 &= 3x^2+\overbrace{-6x+x}^{-5x}-2 \\ &= (3x^2-6x)+(x-2) \\ &= 3x(x-2)+(x-2) \\ &= (x-2)(3x+1) \end{aligned}$$

  Es decir, $3x^2-5x-2=(x-2)(3x+1)$.

Ejemplo 5.28

Factorizar $5x^4+13x^2-6$:

- Multiplicamos primer coeficiente (5) y término independiente (-6); $5(-6)=-30$
- Hallamos dos números que multiplicados den -30 y sumados den 13; ellos son 15 y -2.
- $$\begin{aligned} 5x^4+13x^2-6 &= 5x^4+\overbrace{15x^2-2x^2}^{13x}-6 \\ &= (5x^4+15x^2)+(-2x^2-6) \\ &= 5x^2(x^2+3)-2(x^2+3) \\ &= (x^2+3)(5x^2-2) \end{aligned}$$

  Es decir $5x^4+13x^2-6=(x^2+3)(5x^2-2)$.

5.8 Cubo perfecto de binomio

$$x^3 \pm 3x^2y+3xy^2 \pm y^3 = (x \pm y)^3$$

Para reconocer este producto notable se deben tomar en cuenta los siguientes puntos:

- Debe tener cuatro términos, y estar ordenado con respecto a una letra.
- Dos de sus términos, el primer (x^3) y el cuarto (y^3) deben poseer raíz cúbica exacta.
- El segundo término debe ser igual al triple producto del cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del cuarto término $(3x^2y)$.
- El tercer término debe ser igual al triple producto de la raíz cúbica del primer termino por el cuadrado la raíz cúbica del cuarto término $(3xy^2)$.
- El segundo y el cuarto término deben tener el mismo signo y puede ser positivo o negativo, el primer y tercer término siempre son positivos (si el primer y tercer término son negativos, se procede a realizar factor común con el factor -1).

- Si todos los términos son positivos, el resultado es el cubo de la suma de dos cantidades $(x+y)^3$, cubo perfecto de binomios (cuatrinomio); si hay términos negativos, el resultado es el cubo de la diferencia de dos cantidades $(x-y)^3$.

Ejemplo 5.29

Factorizar $27a^3-8b^3-54a^2b^2$.

- Ordenamos el polinomio $27a^3-54a^2b^2+36ab^4-8b^6$.
- Raíces cúbicas del primer y cuarto termino: $\sqrt[3]{27a^3}=3a$ y $\sqrt[3]{8b^6}=2b^2$.
- Calculamos los productos en el segundo y tercer término :$3(3a^2)(2b^2)=54a^2b^2$ y $3(3a)(2b^2)^2=36ab^4$
- Resultado $(3a-2b^2)^3$.

Ejemplo 5.30

Factorizar $1+12a+48a^2+64a^3$.

- El polinomio ya está ordenado: $1+12a+48a^2+64a^3$.
- Raíces cubicas del primer y cuarto termino: $\sqrt[3]{1}=3a$ y $\sqrt[3]{64a^3}=4a$.
- Calculamos los productos en el segundo y tercer termino :$3(1^2)(4a)=12a$ y $3(1)(4a)^2=48a^2$.
- Resultado $(1+4a)^3$.

5.9 Suma o diferencia de cubos perfectos

$$x^3 \pm y^3=(x\pm y)(x^2\mp xy+y^2)$$

La factorización se procede así:

- La suma de dos cubos perfectos se descompone en dos factores: el primero es la suma de sus raíces cúbicas, y el segundo se compone del cuadrado de la primera raíz menos el producto de ambas raíces más el cuadrado de la segunda raíz.
- La diferencia de dos cubos perfectos se descompone en dos factores: el primero es la diferencia de sus raíces cúbicas, y el segundo se compone del cuadrado de la primera raíz más el producto de ambas raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

Ejemplo 5.31

Factorizar $27a^3-8b^6$:

- Raíces: $\sqrt[3]{27a^3}=3a$ y $\sqrt[3]{8b^6}=2b^2$.
- Productos: $(3a)^2=9a^2$, $(3a)(2b^2)=6ab^2$ y $(2b^2)^2=4b^4$.
- Resultado: $(3a-2b^2)(9a^2+6ab^2+4b^4)$.

Ejemplo 5.32

Factorizar $64m^3 + 125n^6$.

- Raíces: $\sqrt[3]{64m^3} = 4m$ y $\sqrt[3]{125n^6} = 5n^2$.
- Productos: $(4m)^2 = 16m^2$, $(4m)(5n^2) = 20mn^2$ y $(5n^2)^2 = 25n^4$.
- Resultado: $(4m+5n^2)(16m^4 - 20mn^2 + 25n^4)$.

Ejemplo 5.33

Factorizar $8(m+n)^3 - 1000$:

- Raíces: $\sqrt[3]{8(m+n)^3} = 2(m+n)$ y $\sqrt[3]{1000} = 10$.
- Productos: $(2(m+n))^2 = 4(m+n)^2$, $2(m+n)(10) = 20(m+n)$ y $(10)^2 = 100$.
- Resultado: $[2(m+n) - 10]\left[4(m+n)^2 + 20(m+n) + 100\right]$.

5.10 Suma o diferencia de dos potencias iguales

$$\begin{aligned} x^n + y^n &= (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots + y^{n-1}) \text{ Si } n \text{ es impar} \\ x^n - y^n &= (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots + y^{n-1}) \text{ Si } n \text{ es par} \end{aligned}$$

Pasos para suma o diferencias de dos potencias iguales:

1. Clasificar la expresión en positiva o negativa y en par o impar (si son positivas y pares no se pueden realizar por este método).
2. Se hallan las raíces de cada término.
3. Se coloca el primer factor, el cual es un binomio cuyo primer término es la raíz del primer termino dado, y el segundo término es la raíz del segundo termino dado.
4. El signo del primer factor (binomio) será el mismo que tiene la expresión dada.
5. Se crea el segundo factor (un factor polinomio) en el cual existirá un número de términos igual al exponente de la expresión dada (los siguientes pasos son solo para el segundo factor).
6. En cada término, se multiplicará el término de la izquierda por el término de la derecha de la expresión dada.
7. En el primer término del factor polinomio el factor de la izquierda tendrá un exponente igual a $n-1$ y el factor derecho tendrá un exponente de cero.
8. Para los exponentes de los siguientes términos, en el caso del factor de la izquierda irán disminuyendo en una unidad y los del termino de la derecha, irán aumentando también en una unidad (si se suman los exponentes de los dos términos, siempre será igual a $n-1$).
9. Si el binomio es negativo, todos los términos del polinomio son positivos: si el binomio es positivo impar, los signos del polinomio se alternarán $(+ \text{ o } -)$ comenzando por el $(+)$.
10. Cuando en el polinomio, el exponente del término de la derecha sea igual a $n-1$, damos por terminada la respuesta.

Ejemplo 5.34

Factorizar $m^8 - n^8$:

- Clasificación $m^8 - n^8$ Expresión negativa par.
- Raíces $\sqrt[8]{m^8} = m$ y $\sqrt[8]{n^8} = n$.
- Binomio $(m-n)$.
- Polinomio $\left[m^7n^0 + m^6n^1 + m^5n^2 + m^4n^3 + m^3n^4 + m^3n^4 + m^2n^5 + mn^6 + m^0n^7\right]$.
- Respuesta $(m-n)(m^7 + m^6n^1 + m^5n^2 + m^4n^3 + m^3n^4 + m^2n^5 + mn^6 + n^7)$.

Ejemplo 5.35

Factorizar $m^9 + n^9$:

- Clasificación $m^9 + n^9$ Expresión positiva impar.
- Raíces $\sqrt[9]{m^9} = m$ y $\sqrt[8]{n^9} = n$.
- Binomio $(m+n)$.
- Polinomio $\left[m^8n^0 + m^7n^1 + m^6n^2 + m^5n^3 + m^4n^4 + m^3n^5 + m^2n^7 + mn^7 + m^0n^8\right]$.
- Respuesta $(m+n)(m^8 - m^7n^1 + m^6n^2 - m^5n^3 + m^4n^4 - m^3n^5 + m^2n^7 - mn^7 + n^8)$.

Ejemplo 5.36

a) $9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x)^2 + 2(3x)(2y) + (2y)^2 = (3x+2y)^2$.

b) $81z^6 - 90z^3w^2 + 25w^4 = (9z^3)^2 - 2(9z^3)(5w^2) + (5w^2)^2 = (9z^3 - 5w^2)^2$.

c) Factoricemos el trinomio $x^2 + 3x - 4$.
Debemos tener $x^2 + 3x - 4 = (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$, luego, tenemos que buscar dos números a y b tales que $a+b = 3$ y $ab = -4$. Fácilmente, encontramos que $a = 4$ y $b = -1$. En consecuencia:

$$x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$$

d) Factoricemos el trinomio $6x^2 + 11x - 10$.
Debemos tener $6x^2 + 11x - 10 = (ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$. Luego tenemos que buscar números a, b, c y d tales que $ac = 6, bd = -10$ y $ad + bc = 11$. Observamos que a y c son positivos y que b y d son de signos opuestos. Por ensayo y error, llegamos a la combinación correcta:

$$6x^2 + 11x - 10 = (2x+5)(3x-2)$$

La factorización de este trinomio también puede efectuarse reduciéndolo a un caso similar al de la parte c), que es mas sencillo. Veamos cómo se procede.

$$\begin{aligned}6x^2+11x-10 &= \frac{1}{6}[(6x)^2+11(6x)-60]\\ &= \frac{1}{6}(u^2+11u-60), \qquad \text{donde} \quad u=6x\\ &= \frac{1}{6}(u+15)(u-4)\\ &= \frac{1}{6}(6x+15)(6x-4)\\ &= \left(\frac{6x+15}{3}\right)\left(\frac{6x-4}{2}\right)=(2x+5)(3x-2)\end{aligned}$$

e) Factoricemos el trinomio $4x^2-4xy-3y^2$.
Procediendo como en el ejemplo anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}4x^2-4xy-3y^2 &= \frac{1}{4}[(4x)^2-4y(4x)-12y^2]\\ &= \frac{1}{4}(u^2-4yu-12y^2), \quad \text{donde} \quad u=4x\\ &= \frac{1}{4}(u-6y)(u+2y)\\ &= \frac{1}{4}(4x-6y)(4x+2y)\\ &= \left(\frac{4x-6y}{2}\right)\left(\frac{4x+2y}{2}\right)=(2x-3y)(2x+y)\end{aligned}$$

Algunas veces, hay necesidad de agrupar o manipular convenientemente los términos para poder factorizar las expresiones, como en el ejemplo siguiente.

f)

$$\begin{aligned}4x^3+4x^2-9x-9 &= (4x^3+4x^2)-(9x+9)=4x^2(x+1)-9(x+1)\\ &= (4x^2-9)(x+1)=(2x-3)(2x+3)(x+1)\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}a^3-a^2b-ab^2+b^3 &= (a^3-a^2b)-(ab^2-b^3)=a^2(a-b)-b^2(a-b)\\ &= (a^2-b^2)(a-b)=(a-b)(a+b)(a-b)\\ &= (a+b)(a-b)^2\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}y^4+4 &= y^4+4y^2-4y^2+4=(y^4+4y^2+4)-4y^2\\ &= (y^2+2)^2-4y^2=(y^2+2-2y)(y^2+2+2y)\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}27a^3+8b^3 &= (3a)^3+(2b)^3=(3a+2b)((3a)^2-(3a)(2b)+(2b)^2)\\ &= (3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)\end{aligned}$$

j)

$$\left(\frac{t-s}{4r}\right)^3 - 125y^3 = \left(\frac{t-s}{4r} - 5y\right)\left(\left(\frac{t-s}{4r}\right)^2 + \left(\frac{t-s}{4r}\right)(5y) + (5y)^2\right)$$

Ejercicios 5.1

1. Factorizar:
   a) $rs + 4st$
   b) $3a^2b^2 - 6a^2b$
   c) $15x^3y^5 - 25x^4y^2 + 10x^6y^4$
   d) $8x^2 - 53x - 21$
   e) $x^2 + 3x + 4$
   f) $6x^2 + 7x - 20$
   g) $4u^2 - 2uv$
   h) $10xy + 15xy^2$
   i) $16x^5y^2 + 8x^3y^3$
   j) $121r^3s^4 + 77r^2s^4 - 55r^4s^3$
   k) $7x^2 + 10x - 8$
   l) $12x^2 - x - 6$
   m) $9x^2 + 24x + 16$
   n) $16z^2 - 56z + 49$
   ñ) $36r^2 - 25t^2$
   o) $z^4 - 64w^4$
   p) $64x^3 + 27$
   q) $125 - 27x^3$
   r) $2ay^2 - axy + 6xy - 3x^2$
   s) $3x^3 + 3x^2 - 27x - 27$
   t) $x^4 + 2x^3 - x - 2$
   u) $a^6 - b^6$
   v) $x^2 + 4x + 4 - 9y^2$
   w) $y^6 + 7y^3 - 8$
   x) $x^{16} - 1$
   y) $4x^3 + 4x^2 + 2$
   z) $x^2 - 4y^2 - 6x + 9$
   a1 $x^8 - 16$
   a2 $6w^8 + 17w^4 + 12$
2. El perímetro de un triángulo rectángulo es $5m^2 + 8m + 6$. Un cateto mide $m^2 + 3m + 1$ y la hipotenusa, $3m^2 + 4m + 1$. Calcula el valor del tercer lado.
3. Halla dos polinomios cuya suma sea cada uno de los siguientes polinomios:
   a) $2y - 5$
   b) $-5x^5 - 6x^3 + 17x$
   c) $3m^2 + 2n - 6$
   d) $-\frac{9}{2}a^3b^2 - \frac{9}{2}a^2b^3$
4. El lado de un rectángulo se representa con el polinomio $x + 3$ y el otro lado, con el polinomio $3x + 1$. A partir de esta información, determina:
   a) El área del rectángulo en términos de x.
   b) El perímetro del rectángulo
   c) El área del rectángulo si $x = \frac{3}{2}$.
   d) El perímetro del rectángulo si $x = 6$
5. Miguel compró una CPU para su computadora. si cuenta con espacio de área $100x^2 + 24x - 8$ y sabe que las dimensiones de la CPU son largo:$10x + 3$ y ancho: $10x - 1$. ¿ En este espacio cabe la CPU?
6. Calcula el área de una tableta con dimensiones $3x + 4$ y $3x + 1$.

7. El volumen del prisma trapezoidal de la figura 5.1 está dado por $60x^3y + 280x^2y^3$, la longitud de un lado de la base es $20xy$. Calcula el área de la cara frontal.

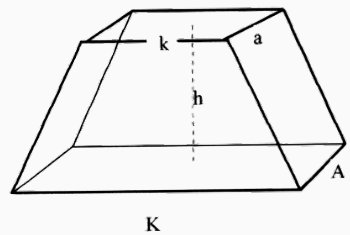


Figura 5.1: Prisma trapezoidal.

8. El volumen del prisma de la figura 5.2 está dado por $40x^3 + 50x^3y$, la altura h es $10x$. Calcula el área B de la base.

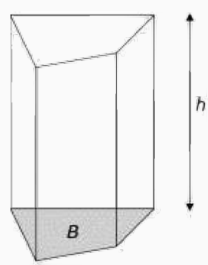


Figura 5.2: Prisma recto.

9. Encuentra el volumen de las cajas I, II y III de la figura con objeto de establecer la fórmula de la diferencia de dos cubos para el caso especial $x > y$. (Ver figura 5.3)

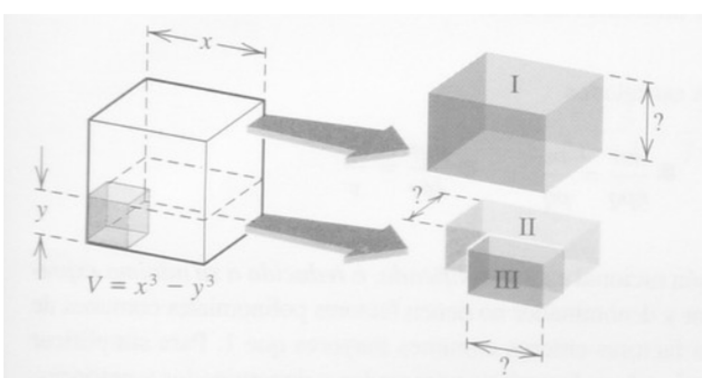
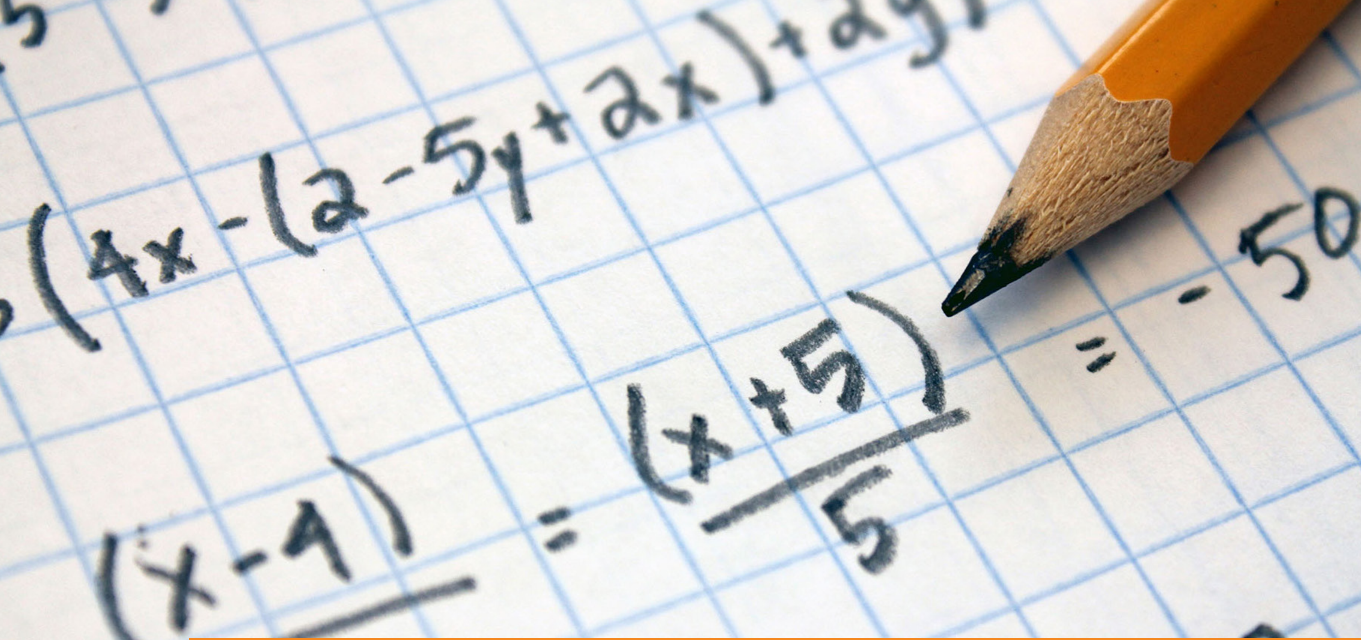


Figura 5.3: Gráfica del ejercicio 9.



6. FRACCIONES ALGEBRAICAS

Definición 6.1 ***Fracción Algebraica***
Una *fracción algebraica* es el cociente de dos expresiones algebraicas. Si la fracción algebraica es el cociente de dos polinomios, la llamamos una *fracción racional*

Ejemplo 6.1

$$\frac{3x^2-5x+1}{2x+7}, \quad \frac{7x-\sqrt{x^2-5}}{x^{\frac{2}{3}}+1}, \quad \frac{5x^2y-x^3+6y^2}{2xy-y^4}, \quad \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}$$

La primera y tercera son fracciones racionales.

La mayoría de las fracciones que consideramos son fracciones racionales en una sola variable. Como la división por cero no es posible, siempre que tratemos con fracciones, supondremos implícitamente que los denominadores son diferentes de cero.

6.1 Simplificación de fracciones racionales

La expresión $\frac{a}{b}$ indica la división de a entre b. El símbolo a se llama *numerador* y el símbolo b, *denominador* de la fracción; de cada uno, se dice que es un *miembro* de la fracción.

En el trabajo con fracciones, se acostumbra a simplificarlas hasta donde sea posible, de tal manera que obtengamos fracciones donde el numerador y el denominador no tengan factores comunes. El principio básico para simplificar fracciones es la siguiente relación:

$$\frac{xz}{yz}=\frac{x}{y} \quad \text{si} \quad z\neq 0$$

Este principio, nos indica que podemos cancelar los factores comunes distintos de cero que aparecen en el numerador y el denominador de una fracción.

6.1.1 Simplificación de expresiones racionales por eliminación

Una expresión racional esa *simplificada* o *reducida a su minina expresión* si el numerador y el denominador no tiene factores polinomiales comunes de grado positivo ni factores enteros comunes mayores que 1. Para simplificar una expresión racional, se factoriza numerador y denominador y suponiendo que los factores del denominador no son cero, se cancelan los factores comunes. En otras palabras, la *mínima expresión de una fracción* o la expresión simplificada es aquella en la cual el numerador y el denominador no tienen factores comunes. Por tanto, para reducir una fracción a su mínima expresión o simplificar la fracción, se factorizan primero el numerador y el denominador y luego, se divide cada uno de ellos entre cada factor que les sea común.

Ejemplo 6.2

Simplifiquemos algunas fracciones:

1. $\dfrac{3w^2-8w+4}{2w^2-w-6}=\dfrac{(3w-2)\cancel{(w-2)}}{(2w+3)\cancel{(w-2)}}=\dfrac{3w-2}{2w+3}$
2. $\dfrac{u^3+u^2-6u}{u^3-3u^2+2u}=\dfrac{\cancel{u}\cancel{(u-2)}(u+3)}{\cancel{u}\cancel{(u-2)}(u-1)}=\dfrac{u+3}{u-1}$
3. $\dfrac{a^5-a^4c-ab^4+b^4c}{a^4-a^3c-a^2b^2+ab^2c}=\dfrac{a^4(a-c)-b^4(a-c)}{a^3(a-c)-ab^2(a-c)}=\dfrac{(a^4-b^4)\cancel{(a-c)}}{(a^3-ab^2)\cancel{(a-c)}}=$
$\dfrac{\cancel{(a^2-b^2)}(a^2+b^2)}{a\cancel{(a^2-b^2)}}=\dfrac{a^2+b^2}{a}$

Ejemplo 6.3

Simplifiquemos más fracciones:

a) $\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-2x-15}=\dfrac{(2x-1)\cancel{(x+3)}}{(x-5)\cancel{(x+3)}}=\dfrac{2x-1}{x-5}.$

b) $\dfrac{x^2-y^2}{x^3-y^3}=\dfrac{\cancel{(x-y)}(x+y)}{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)}=\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}.$

c) $\dfrac{x(x+y)(x^3-y^3)}{(x-y)(x^2-y^2)}=\dfrac{x\cancel{(x+y)}\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)}{\cancel{(x-y)}(x-y)\cancel{(x+y)}}=\dfrac{x(x^2+xy+y^2)}{x-y}$

Algunos errores muy frecuentes en la simplificación de fracciones se presentan por aplicación de las siguientes fórmulas incorrectas:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\cancel{x}+y}{\cancel{x}+z}=\dfrac{y}{z}\\[2em]\dfrac{\cancel{x}+y}{\cancel{x}}=y\\[2em]\dfrac{\cancel{x}+y}{\cancel{x}}=1+y\end{array}\right\}\text{Simplificaciones incorrectas}$$

6.1.2 Producto de fracciones

El producto de dos fracciones $\dfrac{a}{b}$ y $\dfrac{c}{d}$ se define como:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Haciendo en la expresión anterior $c=d=n$, se tiene:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{n}=\frac{an}{bn}$$

sin embargo, como $\dfrac{n}{n}=1$, entonces:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{n}=\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}$$

Por tanto, si cada miembro de una fracción se multiplica o se divide por una misma cantidad diferente de cero, el valor de la fracción no cambia, es decir:

$$\frac{an}{bn}=\frac{a}{b}$$

Ejemplo 6.4

- $\dfrac{3}{4}=\dfrac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\dfrac{15}{20}$
- $\dfrac{8}{10}=\dfrac{8\div 2}{10\div 2}=\dfrac{4}{5}$
- $\dfrac{a^3b^2}{a^4b}=\dfrac{a^3b^2\div a^3b}{a^4b\div a^3b}=\dfrac{b}{a}$

Podemos, en consecuencia, escribir que:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot(-1)}{b\cdot(-1)}=\frac{-a}{-b}$$

Además

$$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$$

Se observa que en una fracción se pueden cambiar simultáneamente los signos del numerador y del denominador sin alterar el valor de la fracción. No obstante, si se cambia el signo del numerador o el signo del denominador, se debe cambiar entonces el signo que precede a la fracción.

Ejemplo 6.5

$$\frac{a-2}{a-3}=\frac{2-a}{3-a}=-\frac{a-2}{3-a}=-\frac{2-a}{a-3}$$

Ejemplo 6.6

Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2+8x+16}\cdot\frac{3x+12}{x-1}$$

Debemos factorizar numeradores y denominadores y luego multiplicar las fracciones. Finalmente simplificamos los factores a los que halla lugar.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+2x-3}{x^2+8x+16}\cdot\frac{3x+12}{x-1} &= \frac{(x-1)(x+3)}{(x+4)^2}\cdot\frac{3(x+4)}{x-1}\\
&= \frac{3(x-1)(x+3)(x+4)}{(x-1)(x+4)^2}\\
&= \frac{3(x+3)}{x+4}
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.7

Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{x^2-6x+9}{x^2-1}\cdot\frac{2x-2}{x-3}$$

Debemos factorizar numeradores y los denominadores y luego, multiplicar las fracciones. Finalmente simplificar los factores a que halla lugar.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-6x+9}{x^2-1}\cdot\frac{2x-2}{x-3} &= \frac{(x-3)^2}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{2(x-1)}{x-3}\\
&= \frac{(x-3)^2 2(x-1)}{(x-1)(x+1)(x-3)}\\
&= \frac{2(x-3)}{x+1}
\end{aligned}$$

6.1.3 División de fracciones

El cociente de dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se define como:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

o también:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{cd}$$

Ejemplo 6.8

- $\frac{2}{5} \div \frac{3}{8} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{15}$
- $$\begin{aligned} \frac{21d^4}{25c^3b^3} \div \frac{504c^2d^2b^5}{525b^3d^3} &= \frac{\left(21d^4\right)\left(525b^3d^3\right)}{\left(25c^3b^3\right)\left(504c^2d^2b^5\right)} = \frac{\left(7\cdot 3\cdot d^4\right)\left(7\cdot 3\cdot 5^2b^3d^3\right)}{\left(5^2\cdot c^2\cdot b^3\right)\left(7\cdot 2^3\cdot 3^2\cdot c^2d^2b^5\right)} \\ &= \frac{7^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot d^7\cdot b^3}{7\cdot 2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot c^5b^8d^2} = \frac{7\cdot d^5}{2^3\cdot c^5\cdot b^5} = \frac{7d^5}{8c^5b^5} \end{aligned}$$

Ejemplo 6.9

Simplifica la expresión:

$$\frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6}$$

De forma análoga que en la multiplicación primero se factorizan los numeradores y denominadores y luego, se realiza la división por último simplificamos eliminando los factores que sean necesarios.

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6} &= \frac{x-4}{(x-2)(x+2)} \div \frac{(x-4)(x+1)}{(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{x-4}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x+2)(x+3)}{(x-4)(x+1)} \\ &= \frac{(x-4)(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+2)(x-4)(x+1)} \\ &= \frac{x+3}{(x-2)(x+1)} \end{aligned}$$

Ejemplo 6.10

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{2x-3} \div \frac{x^2-4}{2x^2-3x} &= \frac{x+2}{2x-3} \div \frac{(x+2)(x-2)}{x(2x-3)}\\ &= \frac{x+2}{2x-3} \cdot \frac{x(2x-3)}{(x+2)(x-2)}\\ &= \frac{(x+2)2(2x-3)}{(2x-3)(x+2)(x-2)}\\ &= \frac{x}{x-2}\end{aligned}$$

Ejemplo 6.11

$$\frac{h^2-9}{k^2-9k} \cdot \frac{hk-9h}{hk+3k} \div \frac{h^3-3h^2}{k3} = \frac{\frac{(h+3)(h-3)}{k(k-9)} \cdot \frac{h(k-9)}{k(h+3)}}{\frac{h^2(k-3)}{k^3}} = \frac{(h+3)(h-3)}{k(k-9)} \cdot \frac{h(k-9)}{k(h+3)} \cdot \frac{k^3}{h^2(h-3)} = \frac{k}{h}$$

6.1.4 Mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo (MCM) de un conjunto de polinomios es el polinomio de menor grado y con los mínimos coeficientes enteros que sea divisible entre cada polinomio del conjunto.

Para determinar el MCM de varios polinomios, se procede de la siguiente manera:

1. Se factorizan los polinomios.
2. Se escribe el MCM de los coeficientes de las expresiones, teniendo en cuenta los factores hallados en el paso anterior.
3. Se escogen los factores repetidos.
4. Si existen factores repetidos, se escoge el de mayor potencia.

Ejemplo 6.12

1. El MCM de $3x$; $4x^2y$; $8x^5y^2$; $36x^4$ es $= 72x^5y^2$.
2. El MCM de $2(x-y)$;$3(x+y)$; $(x-y)^2$ es $6(x-y)^2(x+y)$.

Ejemplo 6.13

Halla el MCM de $x^2-2xy+y^2$; $x^2-2xy+y^2$; $x^2+2xy+y^2$; x^2-y^2; $x^2-3xy+2y^2$; $2x^2+3xy+y^2$.

Factorizamos cada uno de los polinomio dados:

- $x^2-2xy+y^2 = (x-y)^2 = (x-y)(x-y)$.
- $x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2 = (x+y)(x+y)$.
- $x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$.

- $2x^2+3xy+y^2=(2x+y)(x+y)$.
- $x^2-3xy+2y=(x-2y)(x-1)$.

Aplicando el procedimiento descrito se tiene que el *MCM* es $(x-y)^2(x+y)^2(x-2y)(2x+y)$.

6.1.5 Adición y substracción de fracciones

La suma (o diferencia) de dos o más fracciones de igual denominador es una fracción que tiene como numerador la suma (o diferencia) de los numeradores y como denominador, el mismo de las fracciones.

Ejemplo 6.14

- $\dfrac{2}{7}+\dfrac{6}{7}-\dfrac{3}{7}=\dfrac{2+6-3}{7}=\dfrac{5}{7}$
- $\dfrac{2c}{a+b}+\dfrac{3c-4}{a+b}-\dfrac{5-7c}{a+b}=\dfrac{2c+(3c-4)-(5-7c)}{a+b}=\dfrac{2c+3c-4-5+7c}{a+b}=\dfrac{12c-9}{a+b}$

Si las fracciones que van a sumarse (o restarse) tienen diferentes denominadores, se procede así:

- Se halla el *MCM* de los denominadores.
- Se transforma la fracción en una fracción equivalente cuyo denominador será el *MCM* hallado. Esta fracción equivalente se obtiene al multiplicar los dos miembros de cada fracción por el cociente que se obtiene al dividir el *MCM* de los denominadores entre el denominador de cada una de las fracciones.
- Se realizan las operaciones considerando ahora las fracciones como fracciones con igual denominador.

Ejemplo 6.15

Realiza las sumas de las siguientes fracciones algebraicas.

$$\frac{x^2-2xy}{3(x^2-y^2)}+\frac{y}{6x-6y}-\frac{x}{4x+4y}$$

Factorizamos primero los denominadores En este caso, se tiene:

$$\frac{x^2-2xy}{3(x+y)(x-y)}+\frac{y}{6(x-y)}-\frac{x}{4(x+y)}$$

El *MCM* de estos denominadores es $12(x+y)(x-y)$. Ahora, transformamos cada una de las fracciones en una fracción equivalente, así:

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{x^2-2xy}{3(x+y)(x-y)}\right]\left(\frac{4}{4}\right)+\left[\frac{y}{6(x-y)}\right]\left(\frac{2(x+y)}{2(x+y)}\right)-\left[\frac{x}{4(x+y)}\right]\left(\frac{3(x-y)}{3(x-y)}\right)\\
&= \left[\frac{4(x^2-2xy)}{12(x+y)(x-y)}\right]+\left[\frac{2(x+y)y}{12(x+y)(x-y)}\right]-\left[\frac{3(x-y)x}{12(x+y)(x-y)}\right]\\
&= \frac{4(x^2-2xy)+2(x+y)y-3(x-y)x}{12(x+y)(x-y)}\\
&= \frac{4x^2-8xy+2xy+2y^2-3x^2+3xy}{12(x+y)(x-y)}\\
&= \frac{x^2-3xy+2y^2}{12(x+y)(x-y)}\\
&= \frac{x^2-3xy+2y^2}{12(x+y)(x-y)}\\
&= \frac{(x-2y)(x-y)}{12(x+y)(x-y)}\\
&= \frac{x-2y}{12(x+y)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.16

Simplifica:

$$\frac{x-4a}{2ax}+\frac{x-2}{5x^2}+\frac{1}{10x}$$

El *MCM* de $2ax$, $5x^2$ y $10x$ es $10ax^2$, entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{x-4a}{2ax}+\frac{x-2}{5x^2}+\frac{1}{10x} &= \frac{(x-4a)(5x)}{(2ax)(5x)}+\frac{(x-2)(2a)}{(5x^2)(2a)}+\frac{1(ax)}{10x(ax)}\\
&= \frac{5x(x-4a)+2a(x-2)+ax}{10ax^2}\\
&= \frac{5x^2-20ax+2ax-4a+ax}{10ax^2}\\
&= \frac{5x^2-17ax-4a}{10ax^2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.17

Resuelve la operación:

$$\frac{3x-y}{x^2-y^2}-\frac{x+3y}{x^2+3xy+2y^2}-\frac{1}{x+2y}$$

Factorizamos primero los denominadores; en este caso, se tiene:

$$\frac{3x-y}{(x+y)(x-y)}-\frac{x+3y}{(x+y)(x+2y)}-\frac{1}{x+2y}$$

El *MCM* de estos denominadores es $(x+y)(x-y)(x+2y)$. Ahora, transformamos cada una de las fracciones en una fracción equivalente, así:

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{3x-y}{(x+y)(x-y)}\right]\left(\frac{x+2y}{x+2y}\right)-\left[\frac{x+3y}{(x-y)\,(x+2y)}\right]\left(\frac{x-y}{x-y}\right)-\left[\frac{1}{x+2y}\right]\left(\frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)(x-y)}\right)\\
&= \left[\frac{(3x-y)(x+2y)}{(x+y)(x-y)(x+2y)}\right]-\left[\frac{(x+3y)(x-y)}{(x+y)(x-y)(x+2y)}\right]-\left[\frac{(1)(x+y)(x-y)}{(x+y)(x-y)(x+2y)}\right]\\
&= \frac{(3x-y)(x+2y)-(x+3y)(x-y)-(x+y)(x-y)}{(x+y)(x-y)(x+2y)}\\
&= \frac{3x^2+5xy-2y^2-x^2-2xy+3y^2-x^2+y^2}{(x+y)(x-y)(x+2y)}\\
&= \frac{x^2+3xy+2y^2}{(x+y)(x-y)(x+2y)}\\
&= \frac{x^2+3xy+2y^2}{(x+y)(x-y)(x+2y)}\\
&= \frac{(x+2y)(x+y)}{(x+y)(x-y)(x+2y)}\\
&= \frac{1}{x-y}
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.18

$$\begin{aligned}
x-2+\frac{3}{x-1} &= \frac{(x-2)(x-1)}{x-1}+\frac{3}{x-1}\\
&= \frac{(x-2)(x-1)+3}{x-1}\\
&= \frac{x^2-3x+2+3}{x-1}\\
&= \frac{x^2-3x+5}{x-1}
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.19

$$\frac{1}{3x+3}+\frac{1}{2x-2}+\frac{1}{x^2-1}$$

Factorizamos los denominadores:

- $3x+3=3(x+1)$
- $2x-2=2(x-1)$
- $x^2-1=(x+1)(x-1)$

Luego, el MCM es $6(x+1)(x-1)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3x+3}+\frac{1}{2x-2}+\frac{1}{x^2-1} &= \frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{(x-1)(x+1)}\\
&= \frac{1(2)(x-1)}{3(x+1)2(x-1)}+\frac{1(3)(x+1)}{2(x-1)3(x+1)}+\frac{1(6)}{(x-1)(x+1)6}\\
&= \frac{2(x-1)+3(x+1)+6}{6(x+1)(x-1)}\\
&= \frac{2x-2+3x+3+6}{6(x+1)(x-1)}\\
&= \frac{5x+7}{6(x+1)(x-1)}
\end{aligned}$$

6.1.6 Fracciones complejas

Si el numerador o el denominador de una fración, o ambos, contienen a su vez fracciones, la fracción se llama *fracción compleja.*
Por ejemplo:

$$\frac{3}{\frac{2}{5}} \qquad \frac{1+\frac{x}{y}}{2-x} \qquad \frac{\frac{4x}{x+y}+\frac{2y}{x-y}}{3-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}$$

Para reducir una fracción compleja a una simple, se aplican los procedimientos descritos en las operaciones que aparezcan en cada uno de los miembros de la fracción compleja.

Ejemplo 6.20

Simplifica la expresión:

$$\frac{1+\dfrac{x}{y}}{x+y}$$

Realizamos la suma en el numerador de la fracción compleja; en este caso, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{1+\frac{x}{y}}{x+y} &= \frac{\frac{y+x}{y}}{x+y}\\ &= \frac{y+x}{y(x+y)}\\ &= \frac{1}{y}\end{aligned}$$

Ejemplo 6.21

$$\frac{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{x+1}}}$$

Realizamos las operaciones de cada uno de los miembros:

$$\begin{aligned}\frac{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{x+1}}} &= \frac{1+\frac{x-1}{x-1+1}}{\frac{x+1}{x+1-1}}\\ &= \frac{1+\frac{x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}}\\ &= \frac{x+x-1}{x+1}\\ &= \frac{2x-1}{x+1}\end{aligned}$$

Ejemplo 6.22

Simplifica la siguiente fracción compleja.

$$\frac{\frac{2}{x+y}-\frac{1}{x-y}}{\frac{4(x-y)}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}}$$

Realizamos las operaciones de cada uno de los miembros; en esta caso, el *MCM* de estos denominadores es $(x+y)(x-y)$. Ahora, transformamos cada uno de los miembros de la fracción compleja en fracciónes equivalentes, así:

$$
\begin{aligned}
\frac{\dfrac{2}{x+y}-\dfrac{1}{x-y}}{\dfrac{4(x-y)}{x+y}-\dfrac{x+y}{x-y}} &= \frac{\left[\frac{2}{x+y}\right]\left(\frac{x-y}{x-y}\right)-\left[\frac{1}{x-y}\right]\left(\frac{x+y}{x+y}\right)}{\left[\frac{4(x-y)}{x+y}\right]\left(\frac{x-y}{x-y}\right)-\left[\frac{x+y}{x-y}\right]\left(\frac{x+y}{x+y}\right)}\\
&= \frac{\left[\frac{2(x-y)-1(x+y)}{(x+y)(x+y)}\right]}{\left[\frac{4(x-y)(x-y)-(x+y)(x+y)}{(x+y)(x+y)}\right]}\\
&= \frac{\left[\frac{2x-2y-x-y}{(x+y)(x+y)}\right]}{\left[\frac{4x^2-8xy+4y^2-x^2-2xy-y^2}{(x+y)(x+y)}\right]}\\
&= \frac{2x-2y-x-y}{4x^2-8xy+4y^2-x^2-2xy-y^2}\\
&= \frac{x-3y}{3x^2-10xy+3y^2}\\
&= \frac{x-3y}{(3x-y)(x-3y)}\\
&= \frac{1}{3x-y}
\end{aligned}
$$

Ejercicios 6.1

1. Hallar el mínimo común múltiplo de las siguientes expresiones:
   a) $9x^2; 6xy^4; 12x^5y$
   b) $x^2+5x+6; x^2+3x+2; x+2$
   c) $a-b; 3b-3a; a^2-b^2; -5a-5b$
   d) $x^2-2x+1; x^2-1$
   e) $9x^2y; 6xy^4; 12x^5y$
   f) $x^2+5x+6; x^2+6x+9; x^2+3x+2; x+2$
   g) $6x^3-6y^3; x^2+xy+y^2; 2x-2y$
   h) $x^2-1; x^2+3x+2$
2. Simplifica las siguientes expresiones:
   a) $\dfrac{x^3+x}{x^4-1}$
   b) $\dfrac{m^2-9}{9m-m^3}$
   c) $\dfrac{ax+by}{ax^2+bxy}$
   d) $\dfrac{x^2-9x}{x^3-6x^2+9x}$
   e) $\dfrac{x^4+2x^3-3x^2}{x^4+2x^3+2x^2+10x+15}$

f) $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{4}{x^2+1}$

g) $\dfrac{x-1}{x+2}+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{3x+4}{x^2+4x+4}-\dfrac{x+2}{x^2-4}$

h) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5}$

i) $\dfrac{x+2}{x}\div\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right)$

j) $\dfrac{1}{x+1}\cdot\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

k) $\left(x-\dfrac{4}{x}\right)\div(x+2)$

l) $\dfrac{x^2-9x}{x^3-6x^2+9x}$

m) $\dfrac{x^3-19x-30}{x^3-3x^2-10x}$

n) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-2}$

ñ) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}$

o) $\dfrac{x+2}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}$

p) $\dfrac{x+2}{x^2+4x+4}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^3+8}$

Las preguntas 3 a 22 son de selección múltiple con única respuesta.TIPO I. Este tipo de preguntas consta de un enunciado y cuatro opciones de respuesta identificadas con las letras a,b,c,d . Lee detenidamente cada pregunta y selecciona la respuesta correcta.

3. $\forall x\in\mathbb{R}$ tenemos que $0,2x$ representa:
   a) $2\,\%$ de un número real.
   b) un incremento del $20\,\%$.
   c) $0,2\,\%$ de un número real.
   d) $20\,\%$ de un número real.
4. Si x es el precio de un producto cualquiera, entonces, la expresión $0,9x$ representa:
   a) el descuento del $10\,\%$ en el producto.
   b) el descuento del $90\,\%$ en el producto.
   c) el costo del producto con un descuento del $10\,\%$.
   d) el costo del producto con un descuento del $90\,\%$.
5. El triple de la edad de Juan, donde la edad de Juan es P, se representa:
   a) 3^P.
   b) P^3.
   c) $3P$.
   d) $P+3$.
6. Si $P=3x^2y$, entonces:

   a) $P = 12$, con $x = 1$ y $y = 2$.
   b) $P = 72$, con $x = 2$ y $y = 2$.
   c) $P = 24$, con $x = 2$ y $y = 2$..
   d) $P = 3$, con $x = 1$ y $y = 0$..
7. El perímetro de un cuadrado de lado $x+1$ es:
   a) x^2+2x+1.
   b) $4x+4$.
   c) $2x+2$.
   d) x^2-1.
8. El área de un rectángulo de base $x-2$ y alto $x+3$ es:
   a) $4x+2$.
   b) x^2-6.
   c) x^2+x-6.
   d) $2x+1$.
9. El área de la figura 6.1 está dada por la expresión:

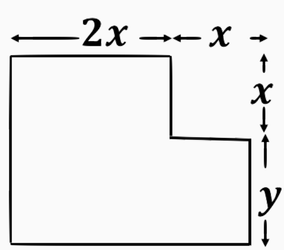


Figura 6.1: ¿Cuál es el área del polígono?

   a) $2x^2+3xy$.
   b) $8x+2y$.
   c) $3x^2+3xy$.
   d) $4x+y$.
10. El volumen de una esfera es cuatro tercios de π por el cubo del radio y el volumen del cono es un tercio de π por el cuadrado del radio por la altura. De acuerdo con lo anterior, el volumen completo del helado de la figura 6.2 está dado por la expresión:

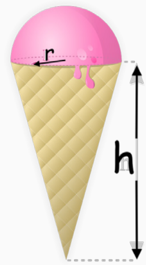


Figura 6.2: ¿Cuál es el volumen que ocupa este helado?

a) $\frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
b) $\frac{1}{3}\pi r^2 (4r + h)$.
c) $\frac{1}{3}\pi r^2 (2r + h)$.
d) $\frac{4}{3}\pi h^3 + \frac{1}{3}\pi h^2 r$..

11. ¿Qué valor debe tomar K para que el polinomio $x^2 - 2x + K$ sea divisible[a] por $x+3$?
    a) -5.
    b) 5.
    c) 15.
    d) -15.
12. Se determina que por cada x hombres y por cada y mujeres, el área de una sala debe ser $V = 5x + 5y + 3x^2 + 3xy$. Las dimensiones que debe tener la sala son:
    a) $8x^2$ y $8xy$.
    b) $x+y$ y $5+3x$.
    c) $5(x+y)$ y $3x(x+y)$.
    d) $x(5+3x)$ y $y(5+3x)$.
13. $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

entonces, aplicando la anterior expresión a $x^4 - y^4$, nos queda que ésta es igual a:
    a) $(x-y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)$.
    b) $(x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$.
    c) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$.
    d) $(x-y)(x+y)$.
14. Si el volumen de una cajá esta dado por la expresión $2x^2 - 3x - 2$, podemos concluir que:
    a) La caja tiene forma de cubo.
    b) La altura está dada por 1, el ancho esta dado por $x-2$ y el largo es $2x+1$.
    c) La altura está dada por 0, el ancho esta dado por $x-2$ y el largo es $2x+1$.
    d) La caja tiene altura de $2x^2$, el ancho esta dado por $3x$ y el largo es 2.

15. Dado que el área de un cuadrado está dada por:

$$A_{Cuadrado} = \frac{D^2}{2},$$

donde D es la diagonal del cuadrado y el área del círculo esta dada por

$$A_{Circulo} = \pi\frac{D^2}{4},$$

donde D es la diagonal del círculo; de la figura 6.3, tenemos que el área sombreada es:

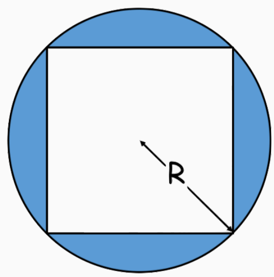


Figura 6.3: Cuadrado inscrito en una circunferencia o circunferencia circunscrita con un cuadrado.

a) $16(\pi - 2)$ puesto que el valor de $R = 4$.
b) $R^2(\pi - 2)$ puesto que resulta de la operación $2R^2 - \pi R^2$.
c) Imposible de calcular puesto que se desconoce el valor del lado del cuadrado.
d) $R^2(\pi - 2)$ puesto que resulta de la operación $A_{Circulo} - A_{Cuadrado}$.

16. El área de un circulo está dada por la expresión:

$$A_{circulo} = \pi a^2,$$

donde a es el valor del radio del círculo. De acuerdo con lo anterior, el área de la región sombreada está dada por:

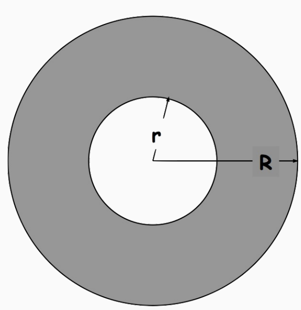


Figura 6.4: Círculos concéntricos

a) $\pi(R-r)$
b) $\pi(R-r)(R+r)$
c) R^2-r^2
d) $\pi(r^2-R^2)$

17. En el paralelepípedo de la figura 6.5, se tiene que $a=x^2+3$, $b=x^2+1$ y $c=x^2+2$. Si el volumen de un paralelepipedo está dado por Volumen=(Largo)(Alto)(Ancho), es decir, $V=a\cdot c\cdot b$; entonces, el volumen de la figura 6.5 es:

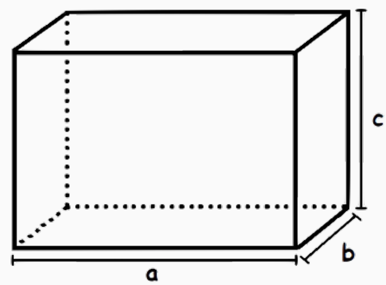


Figura 6.5: Paralelepípedo retángulo.

a) $x^6+6x^4+11x^2+6$
b) $3x^2+6$
c) $x^3+6x^2+11x+6$
d) x^6+6

18. Se define el perímetro como la suma de los lados de una figura plana cerrada. Si un rectángulo mide $\frac{1}{4}x+2$ de largo y $\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ de ancho, su perímetro será:

a) $\frac{1}{16}x^2+\frac{5}{8}x+1$
b) $\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$
c) $x+5$
d) $\frac{1}{x}x^2+\frac{5}{4}x+4$

19. Se define el área de un rectángulo como el producto de su base por la altura. ¿Cuál será el área de un rectángulo cuya base es $\frac{1}{3}x^3-1$ y su altura es $\frac{1}{3}x^3+1$?

a) $\frac{1}{9}x^6-1$
b) $\frac{1}{3}x^3$
c) $\frac{4}{3}x^3$
d) $\frac{1}{9}x^6-\frac{2}{3}x^3+1$

20. De acuerdo con la figura 6.6, el cual tiene un cuadrado incrito en otro cuadrado; podemos decir que:

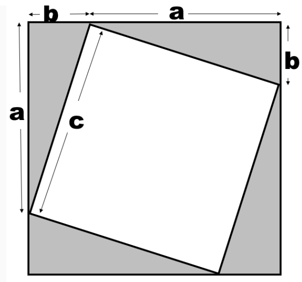


Figura 6.6: Cuadrado inscrito en otro cuadrado.

a) $c^2 = a^2 + b^2$, dado que el área total del cuadrado es igual a la suma de las áreas de los cuatro tiríngulos y el cuadrado de lado c.
b) $c^2 = a^2 + b^2$, dado que $(a+b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$ representa las equivalencias entre las áreas de la figura 6.6,
c) $c^2 = a^2 + b^2$, dado que si $a = 4$, $b = 3$ y $c = 5$, se verifica la igualdad.
d) $c^2 = a^2 + b^2$, dado que $c^2 < a^2 + b^2$, es decir el área del cuadrado de lado $a+b$ es mayor que el área del cuadrado de lado c,

21. ¿Cuáles de los siguientes enunciados equivale a $(a+b)^{-1}$?
    a) $a^{-1} + b^{-1}$.
    b) $\frac{1}{a+b}$.
    c) $(-a) + (-b)$.
    d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
22. El área de una lamina rectangular esta dada por Base·Altura, Si la base mide $2x$ y la altura mide la mitad de la la base, ¿cuál es el área de la lámina?
    a) x^2
    b) $\frac{x}{2}$
    c) $8x^2$
    d) $2x^2$

[a] Para que una expresión a sea divisible por otra expresión b, al efectuar la división $\frac{a}{b}$, el residuo debe ser cero.

Querido Álgebra: Por favor, deja de pedirnos que encontremos a tu x, ella no regresará

7. ECUACIONES

7.1 Ecuaciones. Ecuaciones de primer grado

7.1.1 Conceptos básicos

Definición 7.1 ***Ecuación***

Una ecuación es una proposición en la cual dos expresiones son iguales, dichas expresiones se llaman miembros de la ecuación.

$$\underbrace{2x+8}_{\text{Miembro}} = \underbrace{0}_{\text{Miembro}}$$

Algunas ecuaciones son válidas para todos los valores de las letras que contienen, otras no. Por ejemplo, $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ es válida para todo valor de x, como puede comprobarse al realizar la multiplicación en el lado izquierdo. En otro caso, como $3x+4 = 2x-1$, la igualdad solo se cumple para cierto valor de x.

Las ecuaciones que son válidas para todos los valores posibles de las letras que contienen se llaman *identidades*. Las ecuaciones que son válidas para algunos valores de sus letras, pero no lo son para otros se llaman ecuaciones *condicionales*. Las ecuaciones que no poseen solución se denominan ecuaciones *inconsistentes*.

Ejemplo 7.1

1. $2x+5x = 7x$ Identidad.
2. $3x-4 = 8$ Ec. condicional (es válida solamente para $x = 4$)
3. $x+3 = x+5$ Ec. inconsistente (es un enunciado falso)

En lo sucesivo, y a menos que se diga lo contrario, se empleará la palabra *ecuación* para referirse a ecuaciones condicionales. Tales ecuaciones se usan en la resolución de problemas y el interés principal con respecto a ellas será la obtención de los valores de las letras para los cuales, la ecuación es una proposición válida.

Cualquier conjunto de números que al sustituir o reemplazar letras de valor no conocido en la ecuación hacen a los miembros de esta sean iguales, se llama *solución* (o conjunto solución) de la ecuación. A la letras de valores no conocidos que aparecen en una ecuación, se les da frecuentemente el nombre de *incógnitas*. A los símbolos que representan una cantidad que no cambia en ninguna situación se les llaman *constantes*. Si la ecuación contiene solo una incógnita, cada solución se le llama *raíz*.

Ejemplo 7.2

$x=2; y=-3$ es una solución de $3x+4y=-6$, ya que $3(2)+4(-3)=6-12=-6$.

Ejemplo 7.3

$x=6$ es una raíz de $2x+2=3x-4$, ya que $2(6)+2=12+2=14$ y $3(6)-4=18-4=14$.

El procedimiento para encontrar las raíces o las soluciones se denomina *resolución de la ecuación*. La solución de una ecuación se puede también expresar en notación de conjuntos.

Ejemplo 7.4

En la ecuación $3x+4y=-6$, se tienen como soluciones $x=2$, $y=(-3)$ o también $\{x,y|\,(x\wedge y)\in R; x=2\wedge y=-3\}$.

En este ejemplo el conjunto solución no es único. $x=0$, $y=-\dfrac{3}{2}$ también es solución.

Ejemplo 7.5

En la ecuación $2x+2=3x-4$, se tiene como solución, $x=6$ o también $\{x|x\in R, x=6\}$.

En la resolución de ecuaciones, se debe considerar el concepto de ecuaciones equivalente. En consecuencia, decimos que dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones (o si el conjunto solución es igual).

Ejemplo 7.6

Por sustitución directa, se puede comprobar que $x=3$ es solución de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4x-2 &= 3x+1 \\ 7x &= 6x+3 \end{aligned}$$

Por tanto, ambas ecuaciones son equivalentes.

7.1.2 Propiedades de la igualdad

Si A y B son expresiones algebraicas y si C es un número real, entonces, las siguientes ecuaciones son equivalentes a la ecuación $A = B$.

i) $A + C = B + C$
ii) $A - C = B - C$
iii) $C \times A = C \times B \qquad (C \neq 0)$
iv) $\dfrac{A}{C} = \dfrac{B}{C} \qquad (C \neq 0)$

Ejemplo 7.7

Resuelve las ecuaciones dadas.

$$\begin{aligned}
3x - 4 &= 8 \\
3x - 4 + 4 &= 8 + 4 \text{ Se ha sumado 4 a cada miembro} \\
3x &= 12 \quad \text{Simplificamos} \\
\frac{3x}{3} &= \frac{12}{3} \quad \text{Se ha dividido entre 3 cada miembro} \\
x &= 4
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.8

$$\begin{aligned}
3(4x - 1) &= 4 - 6(x - 3) \\
12x - 3 &= 4 - 6x + 18 \text{ Propiedad distributiva} \\
12x - 3 &= 22 - 6x \quad \text{Simplificamos} \\
18x - 3 &= 22 \quad \text{Se ha sumado 6x a cada miembro} \\
18x &= 25 \quad \text{Se ha sumado 3 a cada miembro} \\
x &= \frac{25}{18} \quad \text{Se ha dividido entre 18 a cada miembro}
\end{aligned}$$

Del uso adecuado de las propiedades de las igualdades, se tiene el siguiente método: cualquier término de una ecuación puede ser transferido desde un lado de la ecuación, hacia el otro lado, con tal de que se cambie el signo de cada término transferido. Esta operación se denomina *transposición de términos*.

Ejemplo 7.9

Resuelve $6x-7=2x+1$

$$\begin{aligned} 6x-7 &= 2x+1 && \text{La ecuación dada} \\ 6x-2x &= 1+7 && \text{Se han transpuesto 2x a la izquierda y -7 a la derecha} \\ 4x &= 8 && \text{Se ha sumado} \\ x &= 4 && \text{Se ha dividido cada miembro entre 4} \end{aligned}$$

7.1.3 Ecuaciones de primer grado (ecuaciones lineales)

Las ecuaciones que se pueden reducir a ecuaciones equivalentes que contienen solamente una variable y ésta es de primer grado (es decir el exponente de la variable es 1) se llaman *ecuaciones simples*, *ecuaciones lineales* o *ecuaciones de primer grado*. En consecuencia, una ecuación lineal en un variable es una ecuación de la forma:

$$ax+b=0,$$

donde a y b son números reales y adicionalmente, $a \neq 0$. Para resolver ecuaciones lineales en una variable, se puede proceder de la siguiente manera:

i) Eliminar las fracciones, si es necesario y remover todos los parentesis que aparezcan en la ecuación.
ii) Aplicar la transposición de términos, de manera que aquellos que contienen a la variable queden reunidos en uno de los miembros de la ecuación y los restantes se localizan en el otro miembro, simplificando convenientemente entre ellos.
iii) Dividir ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la variable.

Ejemplo 7.10

Resuelve las ecuaciones dadas:

$$\begin{aligned} 5x-4 &= 3x+6 \\ 5x-3x &= 4+6 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Ejemplo 7.11

Halla el valor de x:

$$\begin{aligned}
(a+b)x-a^2b &= bx-ax \\
ax+bx-bx+ax &= -a^2b \\
2ax &= a^2b \\
x &= \frac{ab}{2}
\end{aligned}$$

Si una ecuación comprende fracciones, se multiplica cada miembro por el *MCM* de los denominadores y mediante ello, se obtiene una ecuación sin las fracciones.

Ejemplo 7.12

Resuelve las ecuaciones dadas.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x-\frac{2}{3} &= \frac{3}{4}x+\frac{3}{12} \\
12\cdot\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}\right) &= 12\cdot\left(\frac{3}{4}x+\frac{3}{12}\right) \\
6x-8 &= 9x+3 \\
6x-9x &= 3+8 \\
-3x &= 9 \\
x &= \frac{11}{-3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.13

$$\begin{aligned}
\frac{x-3}{4} &= \frac{x+3}{14}-\frac{x+6}{7} \\
\frac{x-3}{4} &= \frac{x+3}{14}-\frac{x+6}{7} \\
28\cdot\left(\frac{x-3}{4}\right) &= 28\cdot\left(\frac{x+3}{14}-\frac{x+6}{7}\right) \\
7x-21 &= (2x+6)-(4x+24) \\
7x-21 &= 2x+6-4x-24 \\
7x-2x+4x &= +6-24+21 \\
9x &= 3 \\
x &= \frac{3}{9}=\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Si los denominadores de una ecuación contienen a la incógnita, la ecuación obtenida al eliminar las fracciones no siempre es equivalente a la primera.

Ejemplo 7.14

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x+1}-3 &= \frac{4x+6}{x+1}\\
(x+1)\left[\frac{2}{x+1}-3\right] &= \left(\frac{4x+6}{x+1}\right)(x+1)\\
2-3(x+1) &= 4x+6\\
2-3x-3 &= 4x+6\\
-3x-4x &= 6+3-2\\
-7x &= 7\\
x &= -1
\end{aligned}$$

Cuando se intenta verificar esta solución, se observa que si $x=1$, los denominadores de la ecuación original se anulan y por tanto, las fraciones carecen de significado. Lo que quiere decir que dicha ecuación $\frac{2}{x+1}-3=\frac{4x+6}{x+1}$ no tiene solución.

El anterior ejemplo muestra que si se multiplica una ecuación por una expresión que contenga a la incógnita, la ecuación resultante puede tener raíces que no satisfagan a la ecuación original. Dichas raíces se llaman *extrañas*.

Por esta razón, cuando una ecuación se multiplica por una expresión que contiene a la incógnita con el propósito de eliminar fracciones, las soluciones de la ecuación obtenida se deben comprobar en la ecuación original con el fin de identificar si alguna de ellas es *extraña*.

Ejemplo 7.15

Halla el valor de x.

$$\begin{aligned}
\frac{a-x}{a+x}+\frac{a}{x} &= -1\\
x(a-x)+a(a+x) &= x(a+x)\\
ax-x^2+a^2+ax &= ax+x^2\\
x^2-x^2+ax+ax+ax &= -a^2\\
3ax &= -a^2\\
x &= -\frac{a}{3}
\end{aligned}$$

Comprobamos:

$$
\begin{aligned}
\frac{a-x}{a+x}+\frac{a}{x} &= \frac{a-\left(-\frac{a}{3}\right)}{a+\left(-\frac{a}{3}\right)}+\frac{a}{\left(-\frac{a}{3}\right)} \\
&= \frac{a+\frac{a}{3}}{a-\frac{a}{3}}-\frac{a}{\frac{a}{3}}= \\
& \frac{3a+a}{3a-a}-\frac{3a}{a} \\
&= \frac{4a}{2a}-3 \\
&= 2-3 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

En consecuencia, ya que el miembro de la derecha es -1, la solución es la correcta.

Ejemplo 7.16

$$
\begin{aligned}
\frac{y}{y-3}+3 &= \frac{3}{y-3} \\
y+3(y-3) &= 3 \\
y+3y-9 &= 3 \\
y+3y &= 3+9 \\
4y &= 12 \\
y &= 3
\end{aligned}
$$

Si reemplazamos $y=3$ en la ecuación original, entonces, tendremos dos expresiones no definidas. Esto quiere decir que la ecuación original no tiene solución, es decir, es una ecuación inconsistente.

7.1.4 Solución de problemas mediante el uso de ecuaciones de primer grado

Un problema que se puede resolver mediante una ecuación, comprende varias cantidades, de las cuales, unas son conocidas y otras son desconocidas. Igualmente, contiene datos que permiten observar la igualdad entre dos combinaciones de esas cantidades. Si el problema se puede resolver a través de una ecuación de una variable, entonces las cantidades desconocidas deben expresarse en una sola letra.

El esquema siguiente, es el sugerido para poder resolver las ecuaciones planteadas en este curso:

i) Lee cuidadosamente el problema y estúdialo hasta que quede perfectamente clara la situación que se plantea.

ii) Identifica las cantidades comprendidas en el problema, tanto las conocidas como las desconocidas.

iii) Elige una de las cantidades desconocidas y represéntala mediante una letra (generalmente la x). Después, expresa las otras cantidades desconocidas en término de las otras letras.

iv) Busca en el problema los datos que indiquen qué cantidades o qué combinaciones de estas son iguales.

v) Formula la ecuación, igualando las cantidades o combinaciones apropiadas encontradas en el paso anterior.

vi) Resuelve la ecuación obtenida y comprueba la solución.

Problemas que implican movimiento a velocidad uniforme

Generalmente los problemas de este tipo establecen una relación entre distancias recorridas, entre velocidades o entre tiempos empleados. La fómula fundamental para estos problemas es: $d = vt$, en donde d representa la distancia; v, la velocidad y t, el tiempo. De esta ecuación, se puede obtener las relaciones siguientes: $v = \frac{d}{t}$, $t = \frac{d}{v}$.

Ejemplo 7.17

Un grupo de deportistas efectúan un recorrido de 380 km, en siete horas en una expedición de caza. Durante cuatro horas, viajan a lo largo de una carretera pavimentada y el resto del tiempo por un camino de herradura. Si la velocidad, media en el camino de herradura es de 25 km/h menor que la velocidad media en la carretera, encuéntra la velocidad media y la distancia recorrida en cada uno de los tramos de camino.

Si hacemos $x =$ velocidad en carretera [km/h], entonces, $x - 25 =$ velocidad en el camino de herradura [km/h]. Además:
$4x =$ distancia recorrida en la carretera [km].
$3(x-25) =$ distancia recorrida en el camino de herradura [km] y como
$4x + 3(x-25) =$ distancia total; por tanto,
$4x + 3(x-25) = 380$.
Esta es la situación deseada y se puede resolver de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 4x + 3(x-25) &= 380 \\ 4x + 3x - 75 &= 380 \\ 4x + 3x &= 380 + 75 \\ 7x &= 455 \\ x &= 65 \end{aligned}$$

[km/h en la carretera]. Reemplazando en las ecuaciones planteadas:
$x - 25 = 65 - 25 = 40$ [km/h en el camino de herradura].
$4x = 4(65) = 260$ [km recorridos en la carretera].
$3(x-25) = 3(40) = 120$ [km recorridos en el camino de herradura].
En consecuencia, se tiene como solución:

- Velocidad media en la carretera: 65 km/h.
- Velocidad media en el camino de herradura: 40 km/h.
- Distancia recorrida en la carretera: 260 km.
- Distancia recorrida en el camino de herradura: 120 km.

Problemas sobre mezclas

Muchos problemas implican la combinación de ciertas sustancias de concentración conocida, generalmente expresada en porcentaje para formar una mezcla de concentración fija con respecto a una de las sustancias. Otros implican la mezcla de ciertos artículos de diversos precios. En tales problemas, debe recordarse que la cantidad total de una componente en una mezcla es igual a la suma de las cantidades que hay de ese componente en cada una de las sustancias combinadas o que el valor de una mezcla es la suma de los valores de las sustancias agrupadas.

Ejemplo 7.18

¿Cuántos litros de un líquido que tiene 74 % de alcohol se debe mezclar con 5 litros de otro líquido que tiene 90 % de alcohol, si se desea obtener una mezcla de 84 % de alcohol?
Si hacemos $x =$ número de litros de la solución de 74 % de alcohol que debe emplearse [Lt], entonces, $\frac{74}{100}\,x = 0{,}74x =$ número de litros de alcohol que aporta esta solución [Lt]. Además $\frac{90}{100}(5) = 0{,}90(5) = 4{,}5 =$ número de litros de alcohol en la solución de 90 % [Lt]. Por tanto, $0{,}74x + 4{,}5 =$ número de litros de alcohol en la mezcla, También, $x + 5 =$ número total de litros en la mezcla. Entonces, ya que la mezcla tiene 84 % de alcohol, se puede expresar que: $\frac{84}{100}(x+5) = 0{,}84(x+5) = 4{,}5 =$ número de litros de alcohol en la mezcla [Lt] Así, tenemos:

$$\begin{aligned}
0{,}74x + 4{,}5 &= 0{,}84(x+5)\\
0{,}74x + 4{,}5 &= 0{,}84x + 4{,}2\\
0{,}74x - 0{,}84x &= 4{,}2 - 4{,}5\\
-0{,}1x &= -0{,}3\\
x &= 3
\end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene como solución que deben agregarse 3 litros de la solución al 74 % de alcohol.

Problemas que implican eficiencia de máquinas o de personas

Usualmente, este tipo de problemas son aquellos en los cuales personas o máquinas trabajan conjuntamente para realizar una determinada tarea o un trabajo en especifico.

Ejemplo 7.19

Una bomba de succión que funciona con un motor a gasolina puede drenar la piscina de un hotel en 24 horas. Una bomba de succión que trabaja con un motor eléctrico puede drenar la misma piscina en 36 horas. Después de una hora de estar la bomba eléctrica funcionando, se encendió la bomba a gasolina y ambas bombas continuaron drenando la piscina. ¿Cuánto duró la bomba de gasolina trabajando?

Si hacemos $x =$ tiempo de operación de la bomba a gasolina [horas], entonces, $x + 1 =$ tiempo de operación de la bomba electrica[horas]. Además, $\frac{1}{24}x =$ razón de trabajo de la bomba de gasolina; es decir, que la bomba drena $\frac{1}{24}$ de la piscina por hora; $\frac{1}{36}x =$ razón de trabajo de la bomba de gasolina. Así inferimos decir que la bomba drena $\frac{1}{36}$ de la piscina por

hora.
La siguiente ecuación expresa el hecho que el trabajo realizado por las bombas es igual a la suma de las porciones de trabajo de cada una de las bombas por separado. Como lo que se requiere es drenar una sola vez la piscina, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{24}x+\frac{1}{36}(x+1) &= 1 \\
72\left[\frac{1}{24}x+\frac{1}{36}(x+1)\right] &= 72[1] \\
3x+2x+2 &= 72 \\
5x &= 70 \\
x &= 14
\end{aligned}$$

[Horas de operación de la bomba a gasolina]. En consecuencia, se tiene como solución que la bomba a gasolina trabajó durante 14 horas para drenar totalmente la piscina

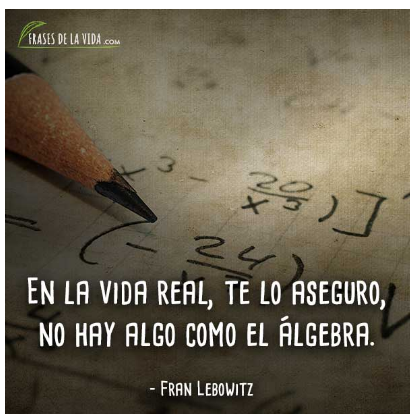


Figura 7.1: Frances Ann Fran Lebowitz (Morristown, Nueva Jersey, 27 de octubre de 1950) es una escritora estadounidense, conocida por sus agudos comentarios sociales acerca de la vida cotidiana estadounidense vista a través de una sensibilidad neoyorquina.

Problemas diversos

Adicionalmente a los ejemplos anteriores, existe una amplia variedad de problemas que se pueden resolver empleando este tipo de ecuaciones. El esquema fundamental es el mismo para todos: encontrar dos cantidades de las cuales una o las dos comprenden un valor no conocido e igualarlas. Cada problema tendrá sus formulas establecidas, en otras palabras, cada campo del conocimiento ya ha definido cuáles son las ecuaciones por utilizar; quiere decir que pueden ser problemas de geometría (áreas, volúmenes), de física (palancas, densidades), de finanzas (tazas de interés, rendimientos, pérdidas), entre otros.
Veremos, a continuación, un par de ejemplos, con el objetivo de brindar herramientas de análisis a los estudiantes del presente curso.

Ejemplo 7.20

Dividir el número 46 en dos partes tales que, $\frac{1}{7}$ de una, más $\frac{1}{3}$ de la otra sumen 10.
Sea $x =$ una de las partes. entonces, $46-x =$ a la otra parte. De acuerdo con las condiciones del problema, la ecuación es:

$$\frac{1}{7}x+\frac{1}{3}(46-x)=10$$

Ahora se resuelve esta ecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{7}x+\frac{1}{3}(46-x) &= 10\\
21\left(\frac{1}{7}x+\frac{1}{3}(46-x)\right) &= 21\times 10\\
\frac{21}{7}x+\frac{21}{3}(46-x) &= 210\\
3x+7(46-x) &= 210\\
3x+322-7x &= 210\\
-4x+322 &= 210\\
-4x &= 210-322\\
-4x &= -112\\
x &= \frac{-112}{-4}\\
x &= 28
\end{aligned}$$

Donde, $46-x=46-28=18$. En consecuencia, se tiene como solución que las dos partes son 28 y 18.

Ejemplo 7.21

La suma de tres enteros consecutivos es 132. Encuentra los enteros.
Sean x el primer número, $x+1$, el segundo número (consecutivo) y $x+2$, el tercer número (consecutivo). La suma de los tres enteros consecutivos es:

$$x+(x+1)+(x+2)$$

La ecuación del problema es:

$$x+(x+1)+(x+2)=132$$

Se resuelve:

$$\begin{aligned} 3\,x+3 &= 132 \\ 3x &= 132-3 \\ 3x &= 129 \\ x &= \frac{129}{3} \\ x &= 43 \end{aligned}$$

De donde, $x = 43$ es el primer número, $x+1 = 43+1 = 44$ es el segundo número y $x+2 = 43+2 = 45$. es el tercer número. Luego: los enteros consecutivos son: $43, 44$ y 45.

Ejemplo 7.22

Si un rectángulo tiene el largo tres centímetros menor, que cuatro veces su ancho y su perímetro es 19 centímetros, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Si hacemos: $x =$ ancho del rectángulo [cm], entonces, $4x-3 =$ largo del rectángulo [cm]. Como el perímetro de un rectángulo es igual a la suma de sus lados, se tiene:

$$(4x-3)+x+(4x-3)+x = 19$$

Esta ecuación se puede resolver de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 10x-6 &= 19 \\ 10x &= 25 \\ x &= \frac{25}{10} \\ &= \frac{5}{2} \\ &= 2,5 \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned} (4x-3) &= 4\,(2{,}5)-3 \\ &= 10-3 \\ &= 7 \end{aligned}$$

De donde, $L = 7$. Luego, el ancho es de $2,5\ cm$ y el largo es de $7\ cm$.

"El conocimiento de las matemáticas añade vigor a la mente, la libera del prejuicio, credulidad y superstición."

John Arbuthnot

Ejemplo 7.23

Una persona que tiene \$ 12,000,000 emplea una parte de esta suma en la compra de una casa; coloca el tercio del resto al 4 % y los otros dos tercios al 5 %. De esta manera, su renta anual es de \$ 392,000. Se requiere conocer el precio de la casa y cada una de las sumas colocadas.

Sea $x =$ el precio de la casa [\$], entonces, $12{,}000{,}000 - x =$ lo que queda de lo que tiene la persona. Además, $\frac{12{,}000{,}000-x}{3} =$ cantidad que coloca al 4 % y $\frac{2(12{,}000{,}000-x)}{3} =$ cantidad que coloca al 5 %. Ahora, el interés que recibe por la cantidad que coloca al 4 % está dada por: $\frac{4}{100} \cdot \frac{(12{,}000{,}000-x)}{3} = \frac{4(12{,}000{,}000-x)}{300}$ y el interés que recibe por la cantidad que coloca al 5 % esta dada por $\frac{5}{100} \cdot \frac{2(12{,}000{,}000-x)}{3} = \frac{10(12{,}000{,}000-x)}{300}$.

De esta manera la renta anual esta dada por la suma de las ganancias individuales:

$$\frac{4(12{,}000{,}000-x)}{300} + \frac{10(12{,}000{,}000-x)}{300} = 392{,}000$$

Al resolver la ecuación, se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{48{,}000{,}000-4x}{300} + \frac{120{,}000{,}000-10x}{300} &= 392{,}000\\
\frac{168{,}000{,}000-14x}{300} &= 392{,}000\\
168{,}000{,}000-14x &= (392{,}000)\,(300)\\
168{,}000{,}000-14x &= 117{,}600{,}000\\
-14x &= -50{,}400{,}000\\
x &= \frac{-50{,}400{,}000}{-14}\\
x &= 3{,}600{,}000
\end{aligned}$$

Con lo cual, el precio de la casa es \$3.600.000. Ahora, la cantidad colocada al 4 % es:

$$\frac{12{,}000{,}000-x}{3} = \frac{12{,}000{,}000-3{,}600{,}000}{300} = 2{,}800{,}000$$

La cantidad al 5 % es:

$$\frac{2(12{,}000{,}000-x)}{3} = \frac{2(12{,}000{,}000-3{,}600{,}000)}{300} = 5{,}600{,}000$$

Luego, el precio de la casa es \$3.600.000. Colocó \$2.800.000 al 4 % y \$5.600.000 al 5 %.

Figura 7.2: Eric Temple Bell (7 de febrero de 1883 - 21 de diciembre de 1960) fue un matemático y escritor de ciencia ficción de origen escocés que vivió en los Estados Unidos la mayor parte de su vida. Sus obras históricas y matemáticas fueron publicadas con su propio nombre, en tanto que los relatos y novelas aparecieron con el seudónimo: John Taine.

Ejemplo 7.24

Al participar en una fiesta había tres veces más mujeres que hombres: 75 mujeres se fueron temprano a sus casas y 150 hombres llegaron tarde a la fiesta. Al terminar esta, había el doble de hombres que mujeres.¿Cuántos había en total en ese momento?.

Sea $x =$ número de hombres al iniciar la fiesta

$3x =$ número de mujeres al iniciar la fiesta

$x + 150 =$ número de hombres al terminar la fiesta

$3x - 75 =$ número de mujeres al terminar la fiesta.

Entonces, la ecuación que determina la cantidad de hombres y mujeres al final de la fiesta está dada por:

$$\begin{aligned} x + 150 &= 2(3x - 75) \\ x + 150 &= 6x - 150 \\ x - 6x &= -150 - 150 \\ -5x &= -300 \\ x &= \frac{-300}{-5} \\ x &= 60 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el número de hombres al iniciar la fiesta es 60. Además, el número de hombres al terminar la fiesta está dado por la relación:

$$\begin{aligned} x + 150 &= 60 + 150 \\ &= 210 \end{aligned}$$

y el número de mujeres al terminar la fiesta está dado por la ecuación:

$$3x - 75 = 3(60) - 75 = 180 - 75 = 105$$

En conclusión, el número total de personas al terminar la fiesta es $210 + 105 = 315$ personas.

7.2 Ecuaciones de segundo grado

7.2.1 Conceptos básicos

Una ecuación con una incógnita, que se encuentra elevada a la segunda potencia, pero no a otra mayor, se llama *ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática* . Las ecuaciones que contienen la primera y la segunda potencia de la incógnita, *ecuaciones completas de segundo grado* y las que solo tiene la segunda potencia de la incógnita se llaman *ecuaciones simples de segundo grado*.
Por ejemplo, las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x^2-3x+2 &= 0 \\ 4x^2 &= 2x-1 \end{aligned}$$

son ecuaciones completas de segundo grado.

Mientras que las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 4 \\ 2x^2-9 &= 0 \end{aligned}$$

son simples de segundo grado.
En forma general, una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma:

$$ax^2+bx+c=0,$$

donde a,b,c son números reales y además, $a \neq 0$.

7.2.2 Solución de ecuaciones simples de segundo grado

Este tipo de ecuación es de la forma $ax^2+c=0$ y se resuelven usando la propiedad de la raíz cuadrada, la cual se expresa de la siguiente manera: para cualquier número real k, la ecuación $x^2=k$ es equivalente a $x=\pm\sqrt{k}$. En consecuencia las raíces de la ecuación serán las dos raíces cuadradas de la solución obtenida.

Ejemplo 7.25

Resuelve las ecuaciones dadas.

$$\begin{aligned} 3x^2-27 &= 0 \\ 3x^2 &= 27 \\ x^2 &= 9 \\ x &= \pm\sqrt{9} \\ x &= +\sqrt{9}=3 \\ x &= -\sqrt{9}=-3 \end{aligned}$$

Luego, el conjunto solución es:

$$\{-3,3\}$$

Ejemplo 7.26

$$\begin{aligned} 2x^2-1 &= 0 \\ 2x^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{2} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

por tanto: $x=+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y también: $x=-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$. Luego, el conjunto solución es:

$$\left\{\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

Ejemplo 7.27

$$\begin{aligned} (x-3)^2-8 &= 0 \\ (x-3)^2 &= 8 \\ x-3 &= \pm\sqrt{8} \\ x &= 3\pm\sqrt{8} \end{aligned}$$

por tanto: $x=3+2\sqrt{2}$ y también: $x=3-2\sqrt{2}$. Luego, el conjunto solución es:

$$\left\{3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}\right\}$$

7.2.3 Solución de ecuaciones de segundo grado por factorización

Muchos polinomios de segundo grado pueden ser factorizados como el producto de dos binomios de primer grado. En esta forma, se utiliza la *propiedad de factor cero,* la cual expresa que:
Si A y B son expresiones algebraicas, la ecuación $A\times B=0$ es equivalente a la proposición compuesta:

$$A=0 \qquad \vee \qquad B=0$$

Las ecuaciones de segundo grado se resuelven por el método de factorización, efectuando los siguientes pasos:

i) Se trasladan todos los términos de la ecuación al miembro de la izquierda, con lo que el miembro de la derecha queda igualado a cero.
ii) Se factoriza el polinomio de la izquierda.
iii) Se iguala cada factor con cero y se resuelven las dos ecuaciones de primer grado así formuladas.

Ejemplo 7.28

Resuelve:

$$\begin{aligned} x^2-x-12 &= 0 \\ (x-4)(x+3) &= 0 \end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} x-4 &= 0 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} x+3 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Luego, el conjunto solución es:

$$\{-3,4\}$$

Ejemplo 7.29

$$\begin{aligned} (x+3)(x-4) &= 8 \\ x^2-x-12 &= 8 \\ x^2-x-20 &= 0 \\ (x-5)(x+4) &= 0 \end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} x-5 &= 0 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} x+4 &= 0 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

luego, el conjunto solución es:

$$\{-4,5\}$$

Ejemplo 7.30

$$\begin{aligned} 2x^2 &= x+6 \\ 2\,x^2 - x - 6 &= 0 \\ (2x+3)\,(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} 2x+3 &= 0 \\ x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} x-2 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Luego, el conjunto solución es $\left\{-\frac{3}{2}, 2\right\}$.

Debe recordarse que este método aplica única y exclusivamente si el miembro de la derecha es cero y también si el miembro de la izquierda es factorizable.

7.2.4 Solución de ecuaciones de segundo grado completando cuadrado

Todas las ecuaciones cuadráticas no se pueden resolver por factorización debido a que el método está limitado a coeficientes enteros; sin embargo, existe un método que permite transformar un polinomio de segundo grado en un trinomio cuadrado perfecto. El procedimiento para lograr esta situación es el siguiente:

i) Se trasladan y se ordenan los términos de la ecuación, de tal modo que en el miembro de la izquierda, queden los términos con las incógnitas y en el miembro derecho, queden los términos independientes.
ii) Se dividen los miembros de la ecuación por el coeficiente de la variable que se encuentra elevada al cuadrado.
iii) Se suma a los dos miembros, el cuadrado de la mitad del coeficiente de la variable que se encuentra a la primera potencia.
iv) Se igualan las raíces cuadradas de los dos miembros de la ecuación obtenida en el paso anterior, anteponiendo el signo $\pm$ a la raíz cuadrada del término constante. Este paso produce dos ecuaciones de primer grado.
v) Se resuelven, para la incógnita, las dos ecuaciones obtenidas en el paso anterior.

Ejemplo 7.31

Resuelve las ecuaciones dadas completando el cuadrado perfecto.

$$\begin{aligned}
4x^2 &= 4x+11 \\
4x^2-4x &= 11 \text{ Se ha traspuesto en término } 4x. \\
x^2-x &= \frac{11}{4} \text{ Se han dividido ambos miembros de la ecuación entre 4.} \\
x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{11}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ Se ha sumado a cada miembro } \left(\frac{-1}{2}\right)^2 \\
x^2-x+\frac{1}{4} &= \frac{11}{4}+\frac{1}{4} \text{ Simplificamos.} \\
&= \frac{12}{4} \\
\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 &= 3 \begin{array}{l}\text{Se ha factorizado el miembro derecho} \\ \\ \text{como un trinomio cuadrado perfecto.}\end{array} \\
x-\frac{1}{2} &= \pm\sqrt{3} \\
x &= \frac{1}{2}\pm\sqrt{3} \text{ Se resuelve para x.}
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$x=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$$

o

$$x=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$$

Luego, el conjunto solución es:

$$\left\{\frac{1}{2}-\sqrt{3},\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right\}$$

Ejemplo 7.32

$$\begin{aligned}
2x^2-3x-4 &= 0\\
2x^2-3x &= 4\\
x^2-\frac{3}{2}x &= 4 \text{ Se han dividido ambos miembros entre 2.}\\
x^2-\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2 &= \frac{11}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2 \text{ Se ha sumado a cada miembro}\\
&\qquad \text{el cuadrado de la mitad de-}\tfrac{3}{2}\\
\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 &= \frac{41}{16} \text{ Se ha factorizado el trinomio cuadrado perfecto.}\\
x-\frac{3}{4} &= \pm\sqrt{\frac{41}{16}}\\
x &= \frac{3}{4}\pm\frac{\sqrt{41}}{4} \text{ Se resuelve para x.}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$x=\frac{3-\sqrt{41}}{4}$$

o

$$x=\frac{3+\sqrt{41}}{4}$$

Luego, el conjunto solución es:

$$\left\{\frac{3-\sqrt{41}}{4},\frac{3+\sqrt{41}}{4}\right\}$$

Ejemplo 7.33

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= 0\\
ax^2+bx &= -c\\
x^2+\frac{b}{a}x &= \frac{-c}{a} \text{ Se han dividido ambos miembros entre } a\\
x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{-c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \text{ Se ha sumado a cada miembro}\\
& \qquad \text{el cuadrado de la mitad de -}\frac{b}{a}\\
x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{-c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \text{ Se ha sumado a cada miembro}\\
& \qquad \text{el cuadrado de la mitad de} - \tfrac{b}{a}\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{2a} \text{ Se ha factorizado el trinomio cuadrado perfecto}\\
x+\frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}\\
x &= -\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}} \text{ Se resuelve para } x
\end{aligned}$$

por tanto

$$x=-\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Luego, el conjunto solución es:

$$\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

7.2.5 Solución de ecuaciones de segundo grado mediante la fórmula cuadrática

La solución de toda ecuación de la forma:

$$ax^2+bx+c=0,$$

se puede realizar mediante la expresión:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

A esta expresión, se le conoce con el nombre de *fórmula de la ecuación de segundo grado*.

Ejemplo 7.34

Resuelve la ecuación.

$$6x^2 - x - 12 = 0$$

En este caso, se reemplazan los coeficientes de la fórmula por los de la ecuación dada, es decir: $a = 6$, $b = -1$, $c = -12$. Entonces:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(6)(-12)}}{2(6)} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 288}}{12} \\ &= \frac{1 \pm 17}{12} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$x = \frac{1+17}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

o

$$x = \frac{1-17}{12} = -\frac{16}{12} = -\frac{4}{3}$$

Luego, el conjunto solución es:

$$\left\{-\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right\}$$

Ejemplo 7.35

Resuelve la ecuación:

$$x^2 + 8x + 6 = 0$$

En este caso, se reemplazan los coeficientes de la fórmula por los de la ecuación dada, es decir: $a = 1$, $b = 8$, $c = 6$. Entonces:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 24}}{2} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{40}}{2} \\ &= \frac{-8 \pm 2\sqrt{10}}{2} \\ &= -4 \pm \sqrt{10} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$x = -4 + \sqrt{10}$$

o

$$x = -4 - \sqrt{10}$$

Luego, el conjunto solución es:

$$\left\{-4 - \sqrt{10}, -4 + \sqrt{10}\right\}$$

Solución de problemas mediante el uso de ecuaciones de segundo grado

El planteo de muchos problemas, especialmente aquellos que tratan acerca del producto o el cociente de la incógnita, implican el uso de ecuaciones de segundo grado.

Es conveniente hacer notar que frecuentemente, al resolver un problema mediante el uso de una ecuación de segundo grado, el problema tiene solo una solución en tanto que la ecuación tiene dos soluciones. En tales, casos se descartará la raíz que no satisface las condiciones del problema.

Ejemplo 7.36

Un edificio rectangular cuyo fondo es el doble de su frente, se divide en dos partes mediante una pared situada a 30 metros del frente y paralela a éste. Si la parte trasera del edificio comprende 3500 metros cuadrados, encuentre las dimensiones del edificio.

Sea $x =$ longitud del frente [m], entonces, $2x =$ longitud del fondo [m]. También, $2x - 30 =$ largo de la parte trasera [m], $x =$ ancho de la parte trasera [m]. Por tanto:

$$x(2x - 30) = \text{área de la parte trasera [metros cuadrados.]}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} x(2x-30) &= 3500 \\ 2x^2-30x-3500 &= 0 \\ (x-50)(2x+70) &= 0 \end{aligned}$$

De donde $x=50$ y $x=-35$. Sin embargo, puesto que las dimensiones no pueden ser negativas, se tiene: $x=50$ metros (frente) y $2x=100$ metros (fondo).

Ejemplo 7.37

Los tiempos empleados por dos pintores para pintar cada uno un metro cuadrado difieren entre sí en un minuto. Trabajando conjuntamente emplean 1 hora en pintar 27 mts^2. ¿En cuánto tiempo pinta cada uno un metro cuadrado?

Sea $x =$ número de minutos que necesita el pintor más rá pido para pintar 1 m^2; entonces, $x+1 =$ número de minutos empleados por el otro pintor, Donde $\frac{1}{x} =$ fracción de metro cuadrado que pinta el primero en un minuto y $\frac{1}{x+1} =$ fracción de metro cuadrado que pinta el otro en un minuto. Por tanto: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1} =$ fracción de metro cuadrado que pintan entre los dos en un minuto. No obstante, puesto que trabajando juntos pintan 27 m^2 en 60 minutos, en un minuto, hacen $\frac{27}{60}=\frac{9}{20}$ metros cuadrados. En consecuencia:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{9}{20}$$

Resolviendo esta ecuación, se tiene:

$$\begin{aligned} 20(x+1)+20x &= 9x(x+1) && \text{Se han eliminado las fracciones} \\ 20x+20+20x &= 9x^2+9x && \text{Se han efectuado las multiplicaciones} \\ -9x^2+31x+20 &= 0 && \text{Se ha transpuesto} \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-31\pm\sqrt{(31)^2-4(-9)(20)}}{2(-9)} \\ &= \frac{-31\pm\sqrt{961+720}}{-18} \\ &= \frac{-31\pm\sqrt{1681}}{-18} \\ &= \frac{-31\pm 41}{-18}, \end{aligned}$$

es decir:

$$x_1=4 \text{ o } x_2=-\frac{5}{9}$$

El valor $-\frac{5}{9}$ se descarta en virtud de que un tiempo negativo no tiene significado en este problema, por tanto: $x=4$ y $x+1=5$. De este modo, los pintores emplean 4 y 5 minutos, respectivamente, para pintar un metro cuadrado.

Ejercicios 7.1

1. En la teoría eléctrica, la fórmula:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

se usa para hallar la resistencia total R cuando tres resistores R_1, R_2 y R_3 se conectan en paralelo. ver figura (7.3). Despeja r R_1.

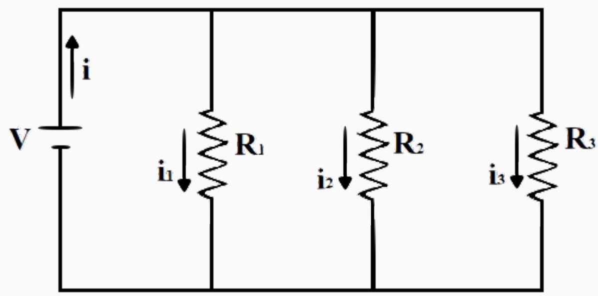


Figura 7.3: Resistencias R_1, R_2 y R_3 en Paralelo

2. En la Fundación Universitaria Tecnológico Comfenalco, la nota final de cada asignatura corresponde a la suma del 30 % de la nota del primer corte, 30 % de la nota del segundo corte y 40 % de la nota del tercer corte durante el semestre; las notas van desde 0,0 a 5,0. Para aprobar una asignatura, se requiere una nota igual o superior a 3,5. Jean Paul González Martínez quiere retirar la asignatura de Cálculo Diferencial, porque piensa que numéricamente no tiene opción de ganarla, dado que en el primer corte obtuvo una calificación de 3,1 y en el segundo corte, de 2,0. ¿Numéricamente Jean Paul González Martínez tiene opción de aprobar la asignatura?. Justifica tu respuesta.
3. Dentro de un proceso industrial para la fabricación de cierto compuesto químico que se usa como insumo en los laboratorios, se tienen 10 mL de una solución que contiene un ácido a 30 % de concentración. ¿Cuántos mililitros de ácido puro han de agregarse para aumentar la concentración a 50 %?
4. Debe hacerse una caja de base cuadrada para pizza a partir de una hoja rectangular de cartón. Para esto, se cortan seis cuadrados de 1 pulgada de las esquinas y en las secciones medias luego doblan los lados (ver figura 7.4). Si el área de la base es de 144 pulgadas cuadradas, ¿de qué tamaño tiene que ser la hoja de cartón?

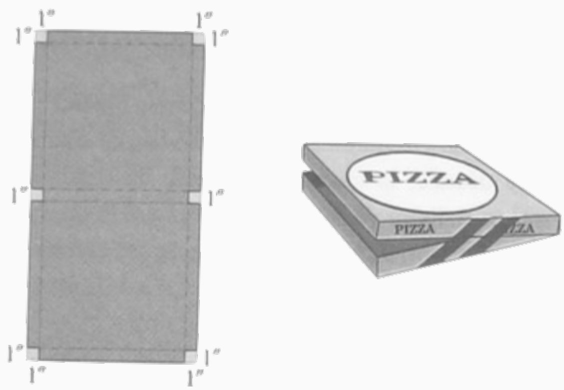


Figura 7.4: Construción de una caja para pizza.

5. Debe construirse un barril cilíndrico, recto, circular, cerrado para petróleo, de 4 pies de altura, de modo que su área superficial total sea de 10π $pies^2$. Encuentra el diámetro del barril.
6. El Almacén Yerman Store, compró 150 computadoras. De estas vendió 50 con una ganancia de 30 % sobre el costo de cada una. ¿En cuánto deberá vender las restantes para tener una ganancia total del 40 % ?
7. La relación entre las lecturas de temperaturas C (Grados Celcius) y F (Grados Fahrenheit) está dada por

   $$C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

   Despeja F e indica el valor de la temperatura en grados Fahrenheit si la temperatura en grados Celcius es de $122°$.
8. Debe construirse un barril cilíndrico, recto, circular, cerrado, para gas, como el de la figura 7.5, de 4 pies de altura, de modo que su área superficial total sea de 48π $pies^2$. Hallar el diámetro del barril.

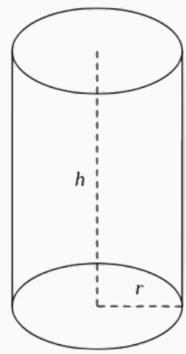


Figura 7.5: Cilindro.

N **Cómo resolver un problema.** El desarrollo de la matemática ha estado motivado en gran parte por las posibilidades de aplicaciones a la vida del hombre. Cualquier problema que nos podamos plantear en donde intervengan mediciones o cantidades de cosas, se puede expresar en el lenguaje de la matemática. Uno de los objetivos de éstas notas es los elementos esenciales de la modelización en matemáticas o, lo que es lo mismo, traducir el problema enunciado en palabras en el idioma español a una relación entre variables que represente números reales. Una vez establecida con toda claridad las ecuaciones en estas variables, podemos aplicar los conocimientos teóricos aprendidos para resolver las ecuaciones.

Los problemas que se plantean a través de situaciones en las que se deben esclarecer las ecuaciones por resolver ofrecen ciertas dificultades a los estudiantes, debido a varios factores, algunos de ellos, ajenos al campo de la matemática. Es importante tener, en primer lugar, un buen dominio del idioma, tener una cabal comprensión de todas las palabras para estructurar un cuadro de la situación planteada en nuestra mente lo más claro posible. En segundo lugar, hay que saber razonar lógicamente poder determinar que cosa se nos pide (Indagar cuál es la incógnita del problema). Es muy importante también en todo este proceso saber establecer asociaciones entre ideas en español e ideas en matemática.

Finalmente, hay que tener un buen dominio de las técnicas por emplear: la resolución de ecuaciones, la geometría, el cálculo.

Podemos hacer un resumen, entonces, de los pasos que se deben seguir cuando resolvemos un problema de palabras:

i) Comprensión del Problema en Español.

ii) Razonar bien para determinar las incógnitas.

iii) Traducir del Español a la Matemática.

iv) Resolver la ecuaciones usando los conocimientos de Matemáticas.

Pensamos que la mejor manera de dominar la técnica de la resolución de problemas es tratando de aprender siguiendo los ejemplos resueltos.

Ejercicios 7.2 Miscelánea de ejercicios

Problemas de economía

En todos los problemas que siguen, empleamos las siguientes fórmulas de la Economía.

Fórmula de la ganancia (para un comerciante):

$$G = C \cdot n \cdot T,$$

donde:
G = la ganancia o utilidad obtenida al vender n cosas.
n = número de cosas a vender.
T = porcentaje de ganancia.
C = costo de cada cosa.

Fórmula de la ganancia (para un productor)

$$G = I - C,$$

donde: G = ganancia por la venta.
I = ingresos por los volúmenes de venta.
C = costos de producccíón.

Fórmula del precio de venta

$$P = C + G.$$

donde
P = el precio de venta de un artículo o bien.
C = el costo al comerciante.
G = la ganancia del comerciante.

1. Un comerciante compró 150 televisores a un costo de 300,000 pesos por unidad. ¿Cuál será la ganancia obtenida al vender todos los televisores si se tiene un porcentaje de utilidad de 25 % en cada televisor?
2. Un comerciante compró 75 neveras a 300,000 pesos cada una ¿A qué precio debería venderlas para tener una ganancia total de 3,000,000 pesos?
3. Un comerciante compró 80 tostadoras. De estas, vendió 30 con una ganancia del 25 % y el resto, con una ganancia del 35 %. ¿Cuál es el costo de cada tostadora, si el comerciante obtuvo una ganancia de 1,200,000 pesos por la venta de todas ellas?
4. El Almacén CompuTex compró 150 computadoras portátiles. De estas vendió 25 con una ganancia de 30 % sobre el costo de cada una. ¿En cuánto debería vender las restantes para tener una ganancia total del 40 %?
5. El señor Duarte vendió 300 reses en dos lotes y obtuvo 44,250,000 de pesos por la venta de todas ellas. Si el primer lote de 75 reses fue vendido en 9,375,000 pesos ¿cuál fue el aumento del precio de venta de cada res del segundo lote?
6. Un abastos compró 300 bolsas de azúcar, de los tipos blanca y morena, a un costo de 262,250 pesos. Si el azúcar blanca costó 850 pesos la bolsa y la morena, 900 pesos la bolsa. ?Cuántos sacos compró el abastos de cada una?
7. Una plaza de toros tiene 3600 localidades de sol y 1700 de sombra. Si la entrada a sol cuesta dos tercios del valor a sombra, ¿Qué precio debería tener cada localidad para recaudar 5,166,000 a plaza llena?

8. Un vendedor de una compañía de víveres gana 600,000 mensuales más una comisión del 5 % sobre las ventas. ¿Cuánto será la venta mensual del vendedor para tener un ingreso de 1,500,000 al mes ?
9. Francisco va a comprar un vehículo de segunda. El precio de venta es de 7,000,000 de pesos. Francisco dará una cantidad inicial de dinero y el resto lo financiará la compañía mediante un pagaré a un año, con un interés del 40 %. ¿Qué cantidad de dinero deberá dar de inicial, para pagar un millón de pesos en intereses?
10. Un maquinista de una compañía constructora gana 500,000 pesos mensuales más una comisión de 10,000 pesos por cada hora de trabajo al frente de la máquina. Trabajando durante un mes en la construcción de una vía agrícola, se ganó 1,081,000 pesos. Calcula el número de horas trabajadas por el maquinista.
11. Un obrero realiza un trabajo en 12 horas. Otro obrero hace el mismo trabajo en 8 horas ¿En cuántas horas trabajando juntos realizarán la misma faena?
12. Una fábrica produce tres tipos de juguetes construidos a base de piezas de madera, plástico y hierro. El primer juguete se construye con 10 piezas de madera, 10 de plástico, 2 de hierro y tiene un costo de 1800 pesos. El segundo juguete se construye con una pieza de madera, una de plástico y una de hierro y tiene un costo de 300 pesos. El tercer juguete se construye usando una pieza de madera, 5 de plástico, 5 de hierro y tiene un costo de 1300 pesos. ¿Cuál es el costo de cada pieza de madera, plástico y hierro?
13. Sea $p=(p_1,p_2,p_3)$ el vector de precios de un mercado en el que se venden tres productos A, B y C. Se estima que la oferta de cada uno de ellos viene dada por:
$$S_A = 15p_1 + p_2 + 3p_3 - 13$$
$$S_B = p_1 + 20p_2 + 10p_3 - 10$$
$$S_C = 10p_1 + 15p_2 + 30p_3 - 50$$
y la demanda viene dada por:
$$D_A = 70 - 8p_1 - p_2 - p_3$$
$$D_B = 93 - 2p_1 - 4p_2 - p_3$$
$$D_C = 107 - p_1 - 3p_2 - 5p_3$$
Calcula los precios de equilibrio, es decir, los precios para los cuales la oferta coincide con la demanda.
14. Consideramos una economía formada por n industrias interrelacionadas $I_1, I_2, ..., I_n$ de modo que cada una produce un único bien $b_1, b_2, ..., b_n$ respectivamente. Cada industria debe atender las demandas de *inputs* de las n industrias (incluida ella misma) y las demandas externas (demanda final). Se trata de calcular el nivel de producción de cada industria para que se satisfagan estos requisitos. Si x_1 es el nivel de produccioón de b_1, debe verificarse la ecuación siguiente:
$$x_1 = a_1 1x_1 + a_1 2x_2 + ... + a_{1n}x_n + d_1, \tag{7.1}$$
donde $a_{1j}x_j$ representa la demanda de b_1 desde la industria I_j y d_1 es la demanda exterior del

producto b_1. Si repetimos el proceso con la producción de las n industrias, se tiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+d_1 & = & x_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+d_2 & = & x_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n+d_n & = & x_n \end{array}\right\} \tag{7.2}$$

y agrupando las variables,

$$\left.\begin{array}{rcl} (1-a_{11})x_1-a_{12}x_2-\cdots+a_{1n}x_n+ & = & d_1 \\ -a_{21}x_1+(-1-a_{22})x_2+\cdots-a_{2n}x_n+ & = & d_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ -a_{n1}x_1-a_{n2}x_2-\cdots+(1-a_{nn})x_n+ & = & d_n \end{array}\right\} \tag{7.3}$$

Se pueden presentar dos situaciones diferentes: un modelo cerrado, en el que todo se produce y consume internamente, o un modelo abierto, en el que parte de la producción se destina al consumo exterior. En un modelo cerrado, todas las demandas exteriores serán cero, es decir, $d_i=0, i=1,\ldots,n$, y se tendrá, por tanto un sistema lineal homogéneo. En el modelo abierto, el sistema será completo.

Supongamos tres industrias interrelacionadas I_1, I_2, I_3 que producen un único bien cada una y cuya producción se obtiene de la forma siguiente: cada unidad de I_1 requiere 0,3 unidades de I_1, 0,2 unidades de I_2 y 0,3 unidades de I_3. Cada unidad producida en I_2 necesita 0,1 unidades de I_1, 0,2 de I_2 y 0,3 de I_3, y cada unidad de I_3 precisa 0,1, 0,5 y 0,1 unidades producidas en I_1, I_2 e I_3 respectivamente. Si las demandas exteriores son 45, 50 y 51 unidades de I_1, I_2 e I_3, determina cuáles son los niveles de produccioón que permiten el equilibrio de esta economía.

15. El volumen de un cubo arista l es $V=l^3$. Si la arista de un cubo es $x^{\frac{1}{3}}+2y^{\frac{1}{2}}$, halla el valor de V
16. Si $s=\dfrac{u}{au+v}$ expresa u en termino de las letras restantes.
17. En la ecuación económica:

$$M=\frac{Q(Q+10)}{44},$$

donde Q es ingreso real y M es el nivel de oferta de dinero. Halla las raíces (Hallar Q).

18. Una malla de alambre se colocará alrededor de un terreno rectangular, de modo que el área cercada sea de 800 $pies^3$ y el largo del terreno sea el doble de su ancho. ¿Cuántos pies de malla se utilizarán?
19. Una compañia de controles universales fabrica unidades de control. Sus modelos nuevos son el Argon I y el Argon II. Para fabricar cada unidad de Argon I, usan 6 medidores y 3 controladores. Para fabricar una cada unidad de Argon II, usan 10 medidores y 8 controladores. La compañía recibe, en total 760 medidores y 500 controladores diarios de sus proveedores ¿Cuántas unidades de cada modelo puede producir diariamente?
20. El crecimiento prenatal de un feto que tenga más de 12 semanas se puede calcular con la fórmula $L=1{,}53t-6{,}7$, donde L es la longitud del feto en centímetros y t, su edad en semanas. La

gestación promedio de un ser humano es de 38 semanas. Si nos atenemos a la función planteada, ¿se puede inferir que un niño que nace con 39,2 cms es un niño prematuro?

21. Tres familias van a una pizzería. La primera familia pide una pizza grande, dos medianas y cuatro pequeñas y pago en total \$ 66000. La segunda familia pide dos pizzas grandes, una mediana y una pequeña y paga \$ 42500. Y la tercera familia pide una pizza grande, una mediana y una pequeña por un precio de \$ 30500. ¿cuál es el costo de una pizza pequeña?
22. El Profesor de Algebra y Geometria: Alfredo Cortés decide que la calificación de sus estudiantes estará dada por la función: $T(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}2x + 0{,}5$, donde $0 \leq x \leq 10$, x es el numero de horas estudiadas. ¿cuál es la calificación para un estudiante que no estudio en la semana?
23. Dos empresas de celulares A y B ofrecen sus servicios de la siguiente manera: La empresa A, cobra un costo básico de \$ 30000 más \$ 190 por minutos consumidos. La empresa B cobra un costo básico de \$ 34000 más \$ 150 por minutos consumido. ¿Cuántos minutos hay que hablar para que ambas empresa cobren lo mismo?
24. Una bomba de succión que trabaja con un motor a gasolina puede drenar la piscina de un hotel en 24 horas. Una bomba de succión que funciona con un motor eléctrico puede drenar la misma piscina en 36 horas. Después de una hora de estar la bomba eléctrica trabajando, se encendio la bomba a gasolina y ambas bombas continuaron drenando la piscina. ¿Cuánto duró la bomba de gasolina funcionando?
25. Existen varias reglas para determinar las dosis de la medicina para niños una vez especificadas las de los adultos. Tales reglas pueden tener como base el peso, la altura, etc. Si A es la edad del niño d es la dosis para adulto y c la dosis para niño, a continuación se presentan dos reglas:

$$\text{Regla de Young:} \qquad c = \frac{A}{A+12}d$$

$$\text{Regla de Cowling:} \qquad c = \frac{A+1}{24}d$$

¿A qué edad las dosis para niños son las mismas usando estas reglas?

26. Si el área de la parte sombreada de la figura es 16 cm^2, entonces halla el valor de m en la figura 12.3.

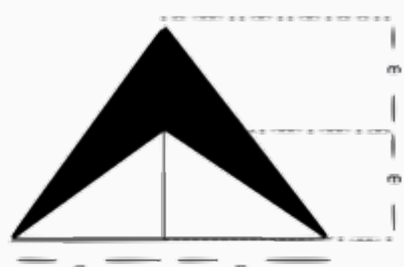


Figura 7.6: Halla el valor de m.

27. Demuestra que si

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con $a \neq 0$, entonces:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

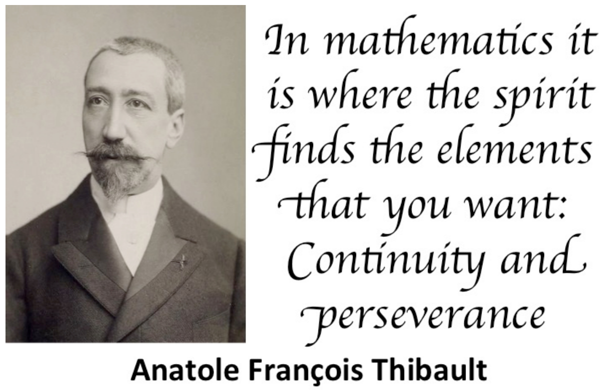


Figura 7.7: “En las matemáticas es donde el espíritu encuentra los elementos que más desea: continuidad y perseverancia”.
Anatole François Thibault; París, 1844 - La Béchellerie, 1924) Poeta, novelista y ensayista francés. Agudo librepensador, es considerado un maestro de la prosa por la sencillez y precisión de su escritura.

Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el universo.

Galileo Galilei

8. ECUACIONES ESPECIALES

8.1 Ecuaciones y expresiones con radicales, logaritmos y potencias

Como su nombre lo indica, una ecuación logarítmica o exponencial es aquella que posee expresiones logarítmicas o exponenciales, respectivamente. Para hallar la solución, es decir, el valor o valores de la variable, es necesario aplicar propiedades de logaritmos o exponenciales según sea el caso.

Ejemplo 8.1

Supongamos que $4^{2x} = 64$, entonces, $2x = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$. En consecuencia, $x = \frac{3}{2}$.

Ejemplo 8.2

Si $\log_6(2x+2) = 3$, entonces, $6^{\log_6(2x+2)} = 6^3$; es decir, $2x+2 = 216$ de donde $x = 107$.

Ejemplo 8.3

Si $\log(x-2) = 1 - \log(x+1)$, entonces

$$10^{\log(x-2)} = 10^{1-\log(x+1)} = \frac{10}{10^{\log(x+1)}}.$$

Esto es, $x-2 = \frac{10}{x+1}$, de donde $x^2 - x - 12 = 0$. Esta ecuación tiene dos soluciones: $x = 4$ y $x = -3$. Pero, para $x = -3$, $\log(x-2)$ y $\log(x+1)$, no están definidas. Así, la única solución es $x = 4$.

Ejemplo 8.4

Usando un solo logaritmo, vamos a expresar la suma:

$$7\log_a(x+1)+\frac{1}{2}\log_a(3x+6)-\log_a\left(x^2+3x+2\right)$$

La expresión dada es igual a:

$$\log_a(x+1)^7+\log_a\sqrt{3x+6}-\log_a\left(x^2+3x+2\right)$$

y a su vez, esta suma es igual a:

$$\log_a\frac{(x+1)^7\sqrt{3x+6}}{x^2+3x+2}=\log_a\frac{(x+1)^6\sqrt{3x+6}}{x+2}.$$

Ejemplo 8.5

Resuelve $2^{3x-2}=5$

$$\begin{aligned}2^{3x-2} &= 5\\ \log 2^{3x-2} &= \log 5\\ (3x-2)\log 2 &= \log 5\\ 3x &= \frac{\log 5}{\log 2}+2\\ x &= \frac{2{,}32+2}{3}\\ x &= 1{,}4408\end{aligned}$$

Ejemplo 8.6

Resuelve

$$\begin{aligned}\log(x+3)+\log x &= 1\\ \log[x(x+3)] &= 1\\ x(x+3) &= 10\\ x^2+3x-10 &= 0\\ (x+5)(x-2) &= 0\end{aligned}$$

Así $x=-5$, o $x=2$,. Al remplazar en la ecuación original por $x=-5$, genera $\log(-2)+\log(-5)$ (logaritmo de números negativos), que como lo vimos en la sección 3.6, no existe.

Ejemplo 8.7

Halla el valor de x en la expresión:

$$\sqrt{2x-3}-x=-1$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x-3}-x &= -1\\
\sqrt{2x-3} &= -1+x\\
\sqrt{2x-3}^2 &= (-1+x)^2\\
2x-3 &= 1-2x+x^2\\
x^2-4x+4 &= 0\\
x &= \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(4)}}{2(1)}\\
x &= \frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}\\
x &= \frac{4\pm 0}{2}\\
x &= \frac{4}{2}\\
x &= 2
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.8

$$\begin{aligned}
3\sqrt{x-1}+11 &= 2x\\
3\sqrt{x-1} &= 2x-11\\
(3\sqrt{x-1})^2 &= (2x-11)^2\\
9(x-1) &= 4x^2-44x+121\\
9x-9 &= 4x^2-44x+121\\
4x^2-53x+130 &= 0\\
x &= \frac{-53\pm\sqrt{53^2-4(4)(130)}}{2(4)}\\
x &= \frac{53\pm\sqrt{2809-2080}}{8}\\
x &= \frac{53\pm\sqrt{729}}{8}\\
x &= \frac{53\pm 27}{8}
\end{aligned}$$

Es decir, una solución será:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{53+27}{8} \\ &= \frac{80}{10} \\ &= 8 \end{aligned}$$

y la otra:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{53-27}{8} \\ &= \frac{26}{8} \\ &= \frac{13}{4} \end{aligned}$$

Al verificar los valores de x_1 y x_2 en la ecuación, nos queda que:

$$\begin{aligned} 3\sqrt{10-1}+11 &= 2(10) \\ 20 &= 20 \end{aligned}$$

En otras palabras, $x_1 = 20$ satisface la ecuación y

$$3\sqrt{\frac{13}{4}-1}+11 \neq 2\cdot\frac{13}{4}$$

$x_2 = \dfrac{13}{4}$ no la satisface.

Ejemplo 8.9

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4} &= 6 \\ \sqrt{2x-1} &= 6-\sqrt{x+4} \\ (\sqrt{2x-1})^2 &= (6-\sqrt{x+4})^2 \\ 2x-1 &= 36-12\sqrt{x-4}+x+4 \\ x-41 &= -12\sqrt{x+4} \\ (x-41) &= (-12\sqrt{x+4})^2 \\ x^2-82x+1681 &= 144x+576 \\ x^2-226x+1105 &= 0 \\ x_1 &= 5 \\ x_2 &= 221 \end{aligned}$$

Al verificar los valores, encontramos que solamente $x_1 = 5$ satisface la ecuación.

Ejemplo 8.10

$$
\begin{aligned}
4^{x+1}+2^{x+1} &= 72 \\
\left(2^2\right)^{x+1}+2^{x+1}=72 \\
\left(2^{x+1}\right)^2+2^{x+1}=72
\end{aligned}
$$

Esta ecuación exponencial es una ecuación de segundo grado. Para resolverla, es necesario el uso de incógnitas auxiliares. Así, el problema se simplifica y es fácil comprobarlo. La incógnita auxiliar para esta ecuación exponencial es: $2^{x+1}=z$. Si remplazamos nos queda:

$$
\begin{aligned}
z^2+z &= 72 \\
z^2+z-72 &= 0 \\
(z+9)(z-8) &= 0 \\
z+9 &= 0 \\
z &= -9 \quad \text{o} \\
z-8 &= 0 \\
z &= 8
\end{aligned}
$$

De los dos resultados, el correcto es $z=8$, porque $2^3=8$ y además $2^m \neq -9$ para todo $m \in \mathbb{R}$ (una potencia con base positiva es siempre positiva). Ahora:

$$
\begin{aligned}
2^{x+1} &= 8 \\
2^{x+1} &= 2^3 \\
x+1 &= 3 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Para la comprobación, tendríamos que:

$$
\begin{aligned}
4^{(x+1)}+2^{(x+1)} &= 72 \\
4^{(2+1)}+2^{(2+1)} &= 72 \\
4^3+2^3 &= 72 \\
64+8 &= 72 \\
72 &= 72
\end{aligned}
$$

Ejemplo 8.11

$$\begin{aligned}
3^{x-1}+3^{x}+3^{x+1} &= 117\\
3^{x}\left(3^{-1}+1+3\right) &= 117\\
3^{x}\left(\frac{13}{3}\right) &= 117\\
3^{x} &= 27\\
3^{x} &= 3^{3}\\
x &= 3
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.12 Crecimiento exponencial

En 1966, la Comisión Internacional contra la Captura de Ballenas protegió a la población mundial de ballena azul de los barcos balleneros. En 1978, se pensaba que la población en el hemisferio sur era de 5000. Ahora, sin depredadores y con abastecimiento abundante de alimentos, se espera que la población crezca exponencialmente de acuerdo con la fórmula:

$$N = 5000e^{0,047t},$$

en la que t está dado en años.

Para la población en el año 2000, tendremos que $t = 22$. Luego:

$$N = 5000e^{0,047(22)} = 14061 \text{ ballenas}$$

Para la población en el 2007, tendremos que $t = 29$. Entonces:

$$N = 5000e^{0,047(29)} = 19539 \text{ ballenas}$$

Siguiendo el modelo creado y asumiendo 0 % de natalidad y 1978 como año cero, ¿cuándo se duplicará la cantidad de ballenas azules?

$$\begin{aligned}
10000 &= 5000e^{0,047t}\\
2 &= e^{0},047t\\
\ln(2) &= 0,047t\\
t &= \frac{\ln(2)}{0,047}\\
t &\approx 15 \text{ años}
\end{aligned}$$

En el 1993, había el doble de ballenas que en 1978.

Ejemplo 8.13 Decrecimiento exponencial

Una técnica para descubrir la antigüedad de un objeto añoso (como un hueso, un mueble, una tabla) es medir la cantidad de Carbono 14 que contiene.

Mientras están vivos, los animales y plantas tienen una cantidad constante de Carbono 14, pero cuando mueren, disminuye por la radioactividad.

El valor de esta cantidad viene dada por la ecuación $R = R_0 e^{-kt}$, donde R_0 es la cantidad en un ser vivo y R, la hallada en una muestra fósil al cabo de t años de su muerte y k es una constante.

El periodo de semidesintegración del C14 es de 5730 años. Veamos la evolución de 1 g de C14.
Dentro de 5730 años, ese gramo se habrá reducido a la mitad:

$$\frac{1}{2} = e^{-5730k}$$
$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -5730k$$
$$k = 0,00012$$

Por tanto, para el C14, tenemos la fórmula:

$$R = R_0 e^{-0,00012t}$$

Supongamos que un hueso hallado en un yacimiento arqueológico contiene el 20 % del C14 que contenía en vida del animal. Vamos a estimar su antigüedad. Según la fórmula anterior:

$$\begin{aligned} 0,2R_0 &= R_0 e^{-0,00012t} \\ 0,2 &= e^{-0,00012t} \\ \ln(0,2) &= -0,00012t \\ t &= 13412 \text{ años} \end{aligned}$$

Ejemplo 8.14 Crecimiento logístico

Supongamos que un alumno es portador del virus de la gripe y regresa a su instituto en el que hay 1000 alumnos. La enfermedad es muy contagiosa y se sabe, por experiencias anteriores, que si no se aplica ningún remedio, el número de infectados por el virus crece exponencialmente a razón de un 250 %.

En ese caso, la ecuación exponencial que nos daría el número de afectados al cabo de t días es:

$$\begin{aligned} N &= 2,5e^{t} \\ &= e^{\ln(2,5e^{t})} \\ &= e^{t\ln(2,5)} \\ &= e^{0,9163t} \end{aligned}$$

Así, al cabo de 4 días, habría:

$$\begin{aligned} N &= e^{0,9163(4)} \\ &\approx 4 \text{ enfermos} \end{aligned}$$

Sin embargo, las autoridades sanitarias conocen bien el desarrollo de la enfermedad y desde los primeros síntomas, se aplica el tratamiento. El crecimiento de afectados sigue una ecuación logística, de la que sabemos la población límite, 1000 alumnos, y el ritmo de crecimiento inicial:

$$N = \frac{1000}{1+ke^{-0,9163t}}$$

Averiguamos k sabiendo que, inicialmente había un solo alumno infectado.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1000}{1+k} \\ 1+k &= 1000 \\ k &= 999 \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación logística que describe este fenómeno es:

$$N = \frac{1000}{1+999e^{-0,9163t}}$$

Calcula el número de afectados que habrá al cabo de 5 días.

$$N = \frac{1000}{1+999e^{-0,9163(5)}} = 89$$

Ejemplo 8.15

El servicio de control de calidad de una empresa que fabrica lavadoras ha comprobado que el porcentaje de lavadoras que sigue funcionando al cabo de t años viene dado por la ecuación:

$$f=\left(\frac{8}{9}\right)^{t}$$

a) ¿ Qué proporción de lavadoras siguen funcionando después de 5 años y después de 15 años?

$$f=\left(\frac{8}{9}\right)^{5}=0,55$$

El 55 % sigue funcionando al cabo de 5 años.

$$f=\left(\frac{8}{9}\right)^{15}=0,17$$

El 17 % sigue funcionando al cabo de 15 años.

b) ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que funcione el 40 % de las lavadoras fabricadas?

$$\begin{aligned}
0,4 &= \left(\frac{8}{9}\right)^{t}\\
\log(0,4) &= \log\left[\left(\frac{8}{9}\right)^{t}\right]\\
\log(0,4) &= t\log\left(\frac{8}{9}\right)\\
t &= \frac{\log(0,4)}{\log\left(\frac{8}{9}\right)}\\
t &\approx 7,8 \text{ años}\\
t &\approx 7 \text{ años y } 284 \text{ días}
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.16 Escala de Richter

La magnitud de un terremoto se relaciona con cuánta energía libera. Instrumentos llamados sismógrafos detectan el movimiento de la tierra; el movimiento más pequeño que puede detectarse en un sismógrafo tiene una amplitud A_0.

A: la medida de la amplitud de la onda del terremoto.

A_0: la amplitud de la onda más pequeña detectable (u onda estándar).

De aquí encontramos R, la medida en la escala de Richter de la magnitud del terremoto usando la fórmula:

$$R = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

La intensidad de un terremoto típicamente se mide entre 2 y 10 en la escala de Richter. Cualquier terremoto que se registre por debajo de 5 es un terremoto menor; puede mover un poco el suelo, pero normalmente no lo suficientemente fuertes para causar algún daño. Los terremotos que miden entre 5 y 7,9 en la escala de Richter son mucho más severos. Pero, cualquier terremoto por encima de 8 causará mucho daño. (El grado más alto registrado para un terremoto fue de 9,5, durante 1960 en Valdivia, Chile.)

Un terremoto se mide con una amplitud 392 veces más grande que A_0. ¿Cuál es la magnitud de este terremoto usando la escala Richter?

$$\begin{aligned} R &= \log\left(\frac{A}{A_0}\right) \\ &= \log\left(\frac{392A_0}{A_0}\right) \\ R &= \log(392) \\ R &\approx 2,6 \end{aligned}$$

La magnitud de este terremoto es de 2,6 en la escala de Richter.

Una diferencia de un punto en la escala Richter corresponde a una diferencia 10 veces la amplitud en la amplitud del terremoto (que se relaciona con la fuerza de la onda). Esto significa que un terremoto que mide 3,6 en la escala de Richter tiene una amplitud 10 veces más grande que uno que mide 2,6.

Ejemplo 8.17 Decibel

El sonido se mide en una escala logarítmica usando una unidad que se llama *decibel*. La fórmula se parece mucho a la de la escala de Richter:

$$d = 10\log\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

P es la potencia o intensidad del sonido y P_0 es el sonido más débil que puede captar el humano.

Una bomba de agua caliente tiene un índice de ruido de 50 decibeles. Una lavadora de platos tiene un índice de ruido de 62 decibeles. ¿Qué tan intenso es el ruido de la lavadora comparado con el ruido de la bomba?

No se puede comparar fácilmente los dos ruidos usando la fórmula, pero se puede compararlas con P_0. Empecemos por encontrar la intensidad del ruido para la bomba de agua caliente. Sea h la intensidad del ruido de la bomba.

$$
\begin{aligned}
50 &= 10\log\left(\frac{h}{P_0}\right)\\
5 &= \log\left(\frac{h}{P_0}\right)\\
10^5 &= \frac{h}{P_0}\\
h &= 10^5 P_0
\end{aligned}
$$

Se repite el mismo proceso para encontrar la intensidad del sonido de la lavadora de platos. d la intensidad del ruido de la lavadora.

$$
\begin{aligned}
62 &= 10\log\left(\frac{d}{P_0}\right)\\
6{,}2 &= \log\left(\frac{d}{P_0}\right)\\
10^{6,2} &= \frac{d}{P_0}\\
d &= 10^{6,2} P_0
\end{aligned}
$$

Para comparar d con h, se puede dividir.[a]

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{h} &= \frac{10^{6,2}P_0}{10^5 P_0}\\
&= 10^{1,2}
\end{aligned}
$$

El ruido de la lavadora de platos es $10^{1,2}$ (alrededor de 15,85) veces más intenso que el de la bomba de agua caliente.

Con los decibeles, cada incremento de 10 significa que el sonido es 10 veces más intenso. Un incremento de 20 sería 10 veces más intenso que el primer 10 y otras 10 veces más intenso para el segundo 10; así un sonido de 75 decibeles es 100 veces más intenso que un sonido de 55 decibeles

[a] Piensa: si el ruido de la lavadora de platos es dos veces más intenso que el de la bomba, entonces d debe ser $2h$; esto es, debe ser 2.

Ejemplo 8.18 ***pH* de líquido**

La medida de acidez de un líquido se llama pH del líquido. Está basada en la cantidad de iones de hidrógeno $(H+)$ en la sustancia. La fórmula del pH es:

$$pH = -\log[H+]$$

$[H+]$ es la concentración de iones de hidrógeno, dada en una unidad llamada mol/L (moles por litro; un mol es $6{,}022 \times 10^{23}$ moléculas o átomos).

Líquidos con pH bajo (hasta 0) son más ácidos que los que tienen un pH alto. El agua, que es neutral (ni ácida ni alcalina) tiene un pH de 7.

Si el jugo de limón tiene un pH de 1,7, ¿cuál es la concentración de iones de hidrógeno (in mol/L) en el jugo de limón?

$$\begin{aligned} pH &= -\log[H+] \\ 1{,}7 &= -\log x \\ -1{,}7 &= \log x \\ x &= 10^{-1{,}7} \\ x &= 0{,}02 \end{aligned}$$

La concentración de iones de hidrógeno en el jugo de limón es de 0,02.

Ejercicios 8.1

1. El peso W (en kg) de una población de elefantes africanos hembras está relacionado con la edad t (t en años) mediante la ecuación:

$$W = 2600\left(1 + 0,5e^{-0{,}0575t}\right)^3$$

   a) ¿Cuánto pesa un elefante recién nacido?
   b) ¿Suponiendo que la hembra adulta pesa 1800 kg, estima su edad.

2. Un medicamento se elimina del cuerpo a través de la orina. La dosis inicial es de 10 mg y la cantidad A que queda en el cuerpo t horas después está dada por:

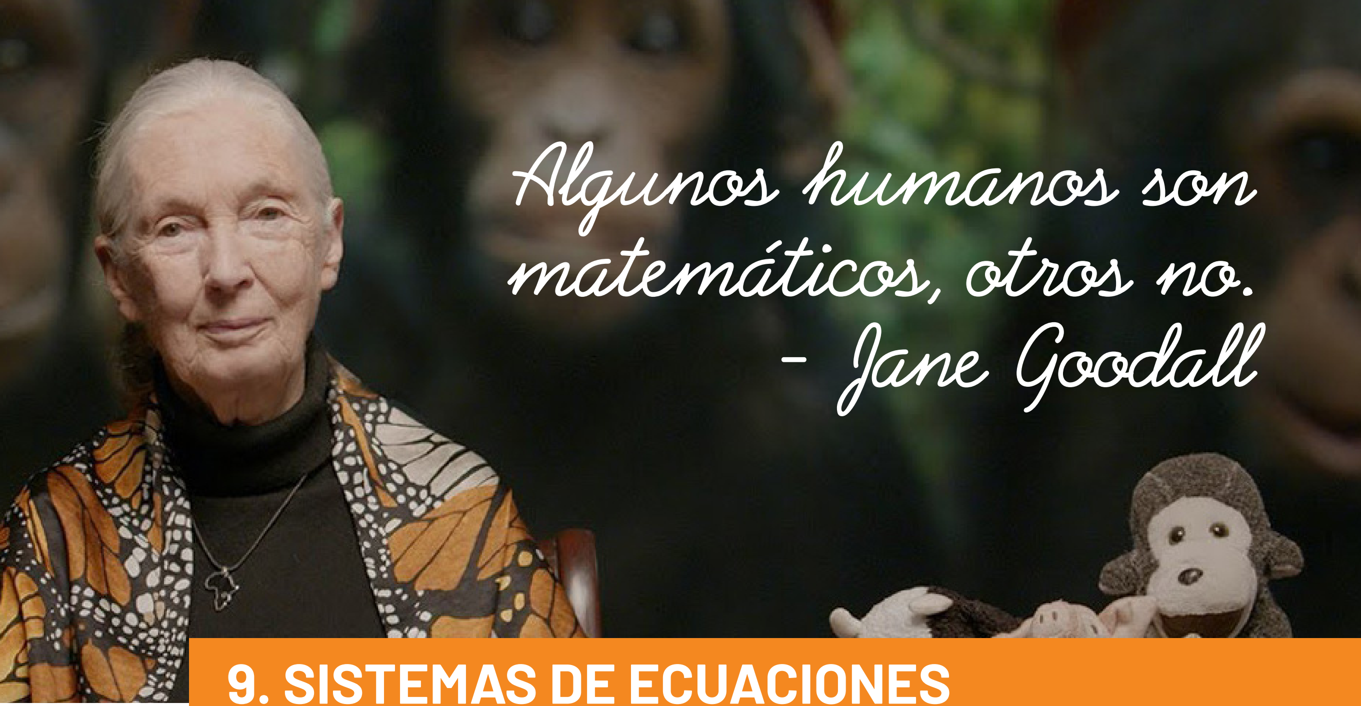
$$A = 10\left(0,8^t\right)$$

   Para que el fármaco haga efecto, debe haber en el cuerpo por lo menos 2 mg.
   a) Determine cuando quedan solo 2 mg.
   b) ¿Cuál es la semivida (o vida media) del medicamento?

3. Si n es el número promedio de terremotos (en todo el mundo) en un año, cuya magnitud está entre R y $R+1$ (en la escala Richter), entonces:

$$\log(n) = 7,7 - 0,9R$$

   Despeja el valor de n.



9. SISTEMAS DE ECUACIONES

9.1 Sistemas de ecuaciones lineales

En esta sección, se estudiarán sistemas de ecuaciones en dos y tres variables, los distintos métodos de solución y sus aplicaciones; así mismo, sistemas de desigualdades en dos variables y su solución.

Un conjunto de ecuaciones lineales se llama un *sistema de ecuaciones lineales* . Si dos ecuaciones tienen la misma solución, se dice que son equivalentes. Toda ecuación equivalente a otra de la clase $ax+by=c$, en la cual a,b y c son constantes, se llama *ecuación de primer grado con dos incógnitas*.

La solución de un sistema lineal de dos ecuaciones en dos variables es el conjunto de todos los pares ordenados de números, tales que cada par satisface a todas las ecuaciones del sistema. Si dos ecuaciones con dos incógnitas tienen una y solo una solución, se denominan *ecuaciones consistentes*. Si no tienen solución, se llaman *ecuaciones inconsistentes*, y si tienen un número infinito de soluciones, *ecuaciones dependientes*.

Los métodos para hallar la solución a los sistemas de ecuaciones son:

i) Metodo gráfico.
ii) Método de adición o sustracción.
iii) Método de sustitución.
iv) Método de igualación.
v) Método de los determinantes.

9.1.1 Método gráfico

Este es un método auxiliar para comprender los tres tipos de ecuaciones anteriormente definidas, no es, sin embargo, un método eficaz para obtener la solución cuando esta existe. En primer lugar, es excesivamente laborioso; segundo, la exactitud del método depende de la habilidad del operador para construir las dos gráficas y para estimar las coordenadas de su punto de intersección.

Para aplicar el método gráfico, se realizan los siguientes pasos:

- Se despeja la incógnita (y) en ambas ecuaciones.
- Para cada una de las ecuaciones, se construye la tabla de valores correspondientes.
- Se representan gráficamente ambas rectas en los ejes coordenados.
- Se hallan los puntos de intercepción.

Ejemplo 9.1

Halla el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales.

$$3x + 2y = 7 \tag{9.1}$$
$$2y - x = 0 \tag{9.2}$$

Despejando y en la ecuación (9.1), obtenemos:

$$y = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}x$$

Calculamos la respectiva tabla de valores:

x	-4	-2	0	2	4
$f(x)$	$9\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$

Análogamente, para la ecuación (9.2), nos queda que:

$$y = 2x$$

y además:

x	-4	-2	0	2	4
$f(x)$	-8	-4	0	4	8

Si graficamos nos queda la (ver figura 9.1).
De donde podemos ver que el punto de intersección tiene coordenadas $(1,2)$ es decir $x = 1$ y $y = 2$.

Los métodos algebraicos utilizados en la resolución de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas buscan *eliminar* primero, una de las variables; de las dos ecuaciones dadas, se obtiene una tercera con una sola incógnita, cuya solución es uno de los valores buscados. Luego, se sustituye dicho valor en una de las ecuaciones del sistema y se calcula el otro valor.

9.1.2 Método de eliminación por adición o sustracción

Este método se puede resumir en los siguientes pasos:

i) Se selecciona la incógnita más fácil de eliminar.

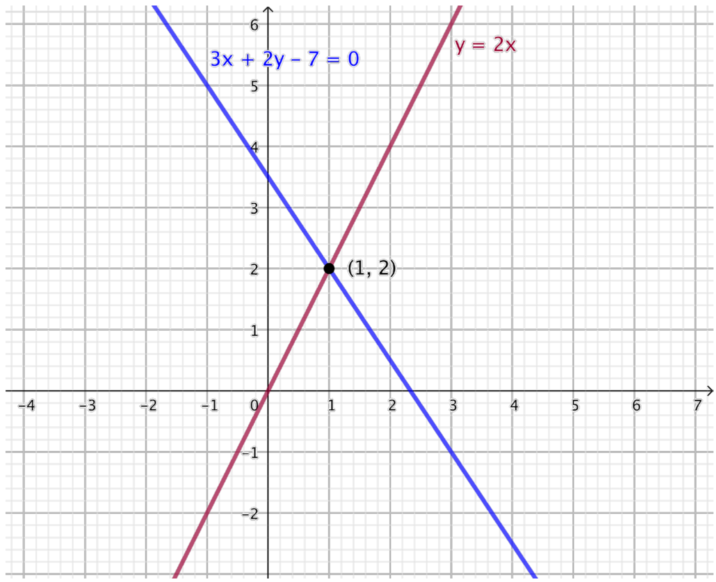


Figura 9.1: Gráficas de las ecuaciones $3x+2y=7$ y $y-2x=0$.

ii) Se encuentra el *MCM* de los dos coeficientes de esta incógnita.

iii) Se multiplican los dos miembros de cada ecuación por el cociente obtenido al dividir el anterior MCM entre el coeficiente de la incógnita seleccionada en la ecuación.

iv) Se suman o se restan los miembros correspondientes de las ecuaciones obtenidas en el paso anterior, según sean opuestos o iguales los signos de los términos en los que aparece la incógnita seleccionada.

v) Se resuelve, para la incógnita que queda, la ecuación resultante.

vi) Se sustituye el valor obtenido en el paso anterior en cualquiera de las ecuaciones dadas y se resuelve ésta para la otra incógnita.

Ejemplo 9.2

Resuelve por adición:

$$\begin{aligned} 3x-y &= 9 \\ 2x+y &= 1 \end{aligned}$$

En el primer caso, seleccionamos la variable de más fácil manipulación, es decir y:

$$\begin{array}{l} 3x-y=9 \\ 2x+y=1 \\ \hline 5x \qquad =10 \end{array}$$

$x = 2$. Reemplazamos el valor de esta incógnita en cualquiera de las ecuaciones y obtenemos:

$$\begin{aligned} 3(2) - y &= 9 \\ 6 - y &= 9 \\ -y &= 3 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

En consecuencia, la solución del sistema se puede escribir como:

$$x = 2 \ , \ y = -3$$

o también:

$$\{(2, -3)\}$$

Ejemplo 9.3

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -2 \\ 3x - 2y &= 12 \end{aligned}$$

En el segundo caso, se presenta el mismo grado de dificultad en la selección de la variable, así es que podemos elegir la variable x para simplificar. De este modo, se tiene que el MCM de dichos coeficiente es 6. Entonces escribimos:

$$\begin{aligned} 3\,(2x - 3y) &= 3\,(-2) \\ 2\,(3x - 2y) &= 2\,(12) \end{aligned}$$

Lo anterior nos produce el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 6x - 9y &= -6 \\ 6x - 4y &= 24 \end{aligned}$$

Como los coeficientes son iguales y del mismo signo, realizamos las diferencia del sistema. Así se tendrá:

$$\begin{array}{cr} & 6x - 9y = -6 \\ - & \underline{6x - 4y = 24} \\ & 5y = -30 \\ & y = 6 \end{array}$$

Reemplazamos el valor de esta incógnita en cualquiera de las ecuaciones y obtenemos:

$$\begin{aligned} 2x - 3\,(6) &= -2 \\ 2x - 18 &= -2 \\ 2x &= 16 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

En definitiva, la solución del sistema se puede escribir como:

$$x = 8\ ,\ y = 6$$

o también:

$$\{8,6\}$$

9.1.3 Método de eliminación de una variable por sustitución

Este método se puede resumir en los siguientes pasos:

i) Se resuelve una de las ecuaciones para una de las variables en términos de la otra, (por ejemplo y en términos de x).

ii) Se sustituye el valor encontrado de y en la otra ecuación. De esta forma se obtiene una ecuación en la que aparece únicamente x (la otra incógnita); y se resuelve esta ecuación.

iii) Se sustituye el valor de x en la ecuación obtenida en el primer paso, y se calcula el valor de la variable y.

Ejemplo 9.4

Resuelve por sustitución:

$$\begin{aligned} 5x+3y &= 13 \\ 3x-y &= 5 \end{aligned}$$

Seleccionamos la segunda ecuación y despejamos la variable y, obteniéndose: $y = 3x-5$. Reemplazamos este valor en la primera ecuación y resolvemos para la otra incógnita:

$$\begin{aligned} 5x+3(3x-5) &= 13 \\ 5x+9x-15 &= 13 \\ 14x &= 28 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Reemplazamos el valor de esta incógnita en la ecuación despejada y obtenemos:

$$\begin{aligned} y &= 3x-5 \\ y &= 3(2)-5 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

En consecuencia, la solución del sistema es: $x = 2$, $y = 1$.

Ejemplo 9.5

$$\begin{aligned} 6x+5y &= 13 \\ 7x-4y &= 25 \end{aligned}$$

Seleccionamos la primera ecuación y despejamos la variable x, obteniéndose: $x = \dfrac{13-5y}{6}$.
Reemplazamos este valor en la segunda ecuación y resolvemos para la otra incógnita:

$$\begin{aligned} 7\left(\frac{13-5y}{6}\right)-4y &= 25 \\ 7(13-5y)-24y &= 150 \\ 91-35y-24y &= 150 \\ -59y &= 59 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Sustituimos el valor de esta incógnita en la ecuación despejada y obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{13-5(-1)}{6} \\ x &= \frac{13+5}{6} = \frac{18}{6} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

En definitiva, la solución del sistema es: $x = 3, y = -1$

9.1.4 Método de eliminación de una variable por igualación

Este método se puede resumir en los siguientes pasos:

i) De cada una de las ecuaciones del sistema, se despeja una de las variables en términos de la otra.

ii) Se igualan las ecuaciones resultantes del paso anterior, obteniéndose así una ecuación en la que aparece una sola variable (la otra incógnita) y se resuelve esta ecuación.

iii) Se sustituye el valor de esta última variable en una de las ecuaciones obtenidas en el primer paso y se calcula el valor de la variable que allí aparece.

Ejemplo 9.6

Resolvamos por igualación:

$$\begin{aligned} 3x-4y &= -2 \\ x+2y &= -4 \end{aligned}$$

Seleccionamos la variable x, para obtener las siguientes ecuaciones: $x = \dfrac{4y-2}{3}$ y $x = -2y-4$.

Igualamos estas dos ecuaciones y resolvemos para la otra incógnita:

$$\begin{aligned}\frac{4y-2}{3} &= -2y-4\\ 4y-2 &= 3(-2y-4)\\ 4y-2 &= -6y-12\\ 10y &= -10\\ y &= -1\end{aligned}$$

Reemplazamos el valor de esta incógnita en cualquiera de las ecuaciones despejadas y obtenemos:

$$x=\frac{4(-1)-2}{3}=\frac{-4-2}{3}=-\frac{6}{3}=-2$$

En consecuencia, la solución del sistema es: $x=-2, y=-1$.

Ejemplo 9.7

$$\begin{aligned}6x+5y &= 13\\ 7x-4y &= 25\end{aligned}$$

Seleccionamos la variable y. Así, resulta las siguientes ecuaciones: $y=\dfrac{13-6x}{5}$ y $y=\dfrac{7x-25}{4}$. Igualamos estas dos ecuaciones y resolvemos para la otra incógnita:

$$\begin{aligned}\frac{13-6x}{5} &= \frac{7x-25}{4}\\ 4(13-6x) &= 5(7x-25)\\ 52-24x &= 35x-125\\ -59x &= 177\\ x &= 3\end{aligned}$$

Reemplazamos el valor de esta incógnita en cualquiera de las ecuaciones despejadas y obtenemos:

$$y=\frac{13-6(3)}{5}=\frac{13-18}{5}=-\frac{5}{5}=-1$$

En definitiva, la solución del sistema es: $x=3$, $y=-1$.

Ejemplo 9.8

Vida de la herramienta[a].
Se denominan *ecuaciones de duración* o de *vida de la herramienta* a expresiones matemáticas que relacionan la duración de la herramienta con uno o varios parámetros del proceso de mecanizado. La elección del valor de la velocidad de corte es un parámetro esencial en todo proceso de mecanizado, porque de ella depende tanto la duración de la herramienta como el nivel de producción y el grado de acabado superficial.
Taylor realizó ensayos considerando como criterio de duración el desmoronamiento del filo de la herramienta, variando la velocidad y manteniendo constante los demás parámetros. Los resultados de los ensayos de Taylor condujeron a pares de valores velocidad de corte-vida de la herramienta, ajustables a una curva potencial en coordenadas cartesianas o a una recta en coordenadas doblemente logarítmicas. Su forma es:

$$vT^n = c \tag{9.3}$$

(Ver Figura 9.2)

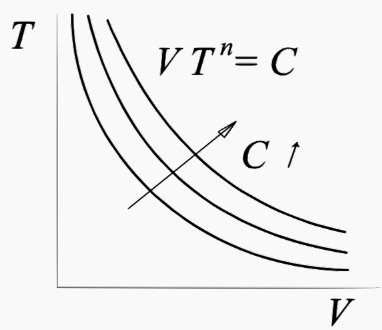


Figura 9.2: Gráfica de la velocidad de corte contra la vida de la herramienta.

o también

$$\log(v) + n\log(T) = \log(C)$$

(ver figura 9.3)
v es la velocidad de corte en m/min; T, la duración de la herramienta en minutos; n es un factor que depende del material de la herramienta; y C es una constante que expresa la velocidad de corte para una duración unitaria de la herramienta, viniendo referido para cada geometría de herramienta relación de forma b/h y tipo de mecanizado, este es un indicador de la maquinabilidad del material de la pieza bajo las condiciones de mecanizado de los ensayos.

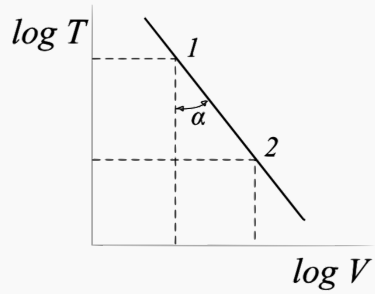


Figura 9.3: Gráfica en escala log − log de la velocidad de corte contra la vida de la herramienta.

El exponente n expresa la pendiente de la recta $\log(v)/\log(T)$ y se puede determinar conociendo dos pares de valores (v_1, T_1) y (v_2, T_2) puede determinarse.
Por ejemplo: cuando una herramienta tiene una velocidad de 400 $pies/min$, el tiempo de vida es de 5 min y si $v = 200$ $pies/min$, entonces, $T = 41$ min. Hallemos la ecuación de Taylor para la vida de las herramientas.
Tenemos:

$$\begin{aligned} (v_1, T_1) &= (400, 5) \quad (9.4) \\ (v_2, T_2) &= (200, 41) \quad (9.5) \end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned} 400(5)^n &= C \quad (9.6) \\ 200(41)^n &= C \quad (9.7) \end{aligned}$$

Si igualamos las ecuaciones 9.6 y 9.7 tenemos:

$$400(5)^n = 200(41)^n$$

Si tomamos los logaritmos naturales de cada término:

$$\begin{aligned} \ln(400) + n\ln(5) &= \ln(200) + n\ln(41) \\ 5{,}9915 + 1{,}6094n &= 5{,}2983 + 3{,}7136n \\ 0{,}6932 &= 2{,}1042n \\ n &= \frac{0{,}6932}{2{,}1042} \\ n &= 0{,}329 \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor de n en la ecuación 9.6, obtenemos el valor para C.

$$\begin{aligned} 400(5)^{0{,}329} &= C \\ C &= 679 \end{aligned}$$

Si remplazamos el valor de n en la ecuación 9.7, obtenemos el mismo valor para C:

$$\begin{aligned} 200(41)^{0,329} &= C \\ C &= 679 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de Taylor para la vida de las herramientas de los datos 9.4 y 9.5 es:

$$vT^{0,329} = 679$$

[a]Tomado de Groover, M. P. (1997). Fundamentos de Manufactura Moderna. Materiales, procesos y sistemas. Naucalpan de Juarez, Mexico, Mexico: Prentice Hall.

9.2 Resolución de ecuaciones de primer grado con tres incógnitas

La solución de este tipo de ecuaciones (si existe) consta de tres números, uno por cada incógnita, que satisfacen todas las ecuaciones dadas. Para encontrar dicha solución, se elimina una de las variables, con el fin de obtener un sistema equivalente, que comprende únicamente a dos ecuaciones con dos incógnitas, y se resuelven de acuerdo con algunos de los métodos descritos con anterioridad.

Ejemplo 9.9

Resolvamos, simultáneamente las ecuaciones:

(1) $3x-2y+3z=16$

(2) $x+3y-6z=-23$

(3) $3x+4y-2z=-9$

Ya que el coeficiente de z en (2) es divisible entre los coeficientes de z en (1) y (3), se empieza por eliminar a z. La operación se efectúa multiplicando (1) por 2 y sumando el resultado a (2); esto es:

(4) $6x-4y+6z=32$ [Ecuación (1) multiplicada por 2]

(2) $x+3y-6z=-23$

(5) $7x-y \quad =9$ [Ecuación (4) más ecuación (2)]

Se multiplica ahora la ecuación (3) por 3 y el resultado se resta de la ecuación (2); es decir:

(6) $15x+12y-6z=-27$ [Ecuación (3) multiplicada por 3]

(2) $x+3y\ -6z=-23$

(7) $14x+9y \quad =-4$ [Ecuación (6) menos ecuación (2)]

Se tienen ahora las ecuaciones (5) y (7), las cuales contienen únicamente a las variables x y y. Resolviendo este nuevo sistema por adición y sustracción, se tiene:

(8) $14x-2y=18$ [Ecuación (5) multiplicada por 2]

(7) $14x+9y=-4$

$-11y=22$ [Ecuación (8) menos ecuación (7)]

Luego, $y=-2$. Sustituyendo $y=-2$ en (5), se obtiene:

$$\begin{aligned} 7x-(-2) &= 9 \\ 7x+2 &= 9 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores buscados son $x=1$ y $y=-2$. Se remplaza estos valores en cualquiera de las ecuaciones originales y se calcula z.. Si se escoge (1), resultaría así:

$$\begin{aligned} 3x-2y+3z &= 16 \\ 3(1)-2(-2)+3z &= 16 \\ 3+4+3z &= 16 \\ 3z &= 12 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

En definitiva, la solución del sistema es: $x=1$, $y=-2$, $z=3$.

Ejemplo 9.10

Una máquina de cambiar monedas cambia los billetes de un dólar en monedas de 25 y de 5 centavos de dólar. Si recibes 12 monedas, después de introducir un billete de 1 dólar, ¿cuántas monedas de cada tipo recibe?

Sean $x=$número de monedas de 25 centavos, $y=$ número de monedas de 5 centavos; entonces, el sistema que se forma es:

$$\begin{aligned} x+y &= 12 \\ 25x+5y &= 100 \end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos que:

$x=2$ y $y=10$.

Ejemplo 9.11

Un joyero tiene dos barras de aleación de oro: una es de 12 quilates y la otra, de 18 (el oro de 24 quilates es oro puro; el de 12 quilates corresponde a $\frac{12}{24}$ de pureza; el de 18, a $\frac{18}{24}$ de pureza y así sucesivamente). ¿Cuántos gramos de cada aleación se deben mezclar para obtener 10 gr de oro de 14 quilates?

Sean $x=$número de gramos utilizados de oro de 12 quilates, $y=$ número de gramos utilizados de oro de 18 quilates, entonces, el sistema que se forma es:

$$\begin{aligned} x+y &= 10 \\ \frac{12}{24}x+\frac{18}{24}y &= \frac{14}{24}(10) \end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos que:

$$x = 6\frac{2}{3} \text{ y } y = 3\frac{1}{3}.$$

Solución de ecuaciones de primer grado por medio de determinantes

Definición 9.1 ***Determinante de segundo orden***

La ordenación cuadricular de cuatro números

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

se denomina *determinante de segundo orden* y su *valor* o desarrollo es: $ab - bc$. Las letras a,b,c, y d se llaman *elementos del determinante.*

Veamos cómo los determiantes se pueden utilizar para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas en dos variables.

Consideremos un sistema general de ecuaciones lineales en las variables x y y, así:

$$\begin{aligned} ax + by &= \quad m \\ cx + dy &= \quad n \end{aligned}$$

Aquí a,b,c,d,m y n *son reales*; entonces, las soluciones de dichas ecuaciones se pueden determinar mediante las siguientes fórmulas:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}},$$

donde $ad - bc \neq 0$. Como se observa, existen tres determinantes involucrados en la solución del sistema, De esta forma se puede escribir:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}$$

Notése que D es el determinante de los coeficientes de las variables del sistema. Para dos incógnitas, este método se puede resumir en los siguientes pasos:

i) En cada ecuación, se transponen y ordenan los términos de tal modo que los términos constantes aparezcan en el miembro de la derecha y los que contienen las variables, en el de la izquierda. Estos deben tener el mismo orden en cada ecuación.

ii) Se indica cada solución (o valor de una de las incógnitas) como cociente de dos determinantes. El denominador es siempre el determinate de los coeficientes.

iii) El numerador de la solución para una incógnita es el determinante que se obtiene al sustituir en el determinante de los coeficientes, los coeficientes de la incógnita por los términos constantes.

Ejemplo 9.12

Resolvamos:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 9 \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(9)(1) - (1)(-1)}{(3)(1) - (2)(-1)} = \frac{9 - (-1)}{3 - (-2)} = \frac{9+1}{3+2} = \frac{10}{5} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(1) - (2)(9)}{(3)(1) - (2)(-1)} = \frac{3 - 18}{3 - (-2)} = \frac{-15}{3+2} = \frac{-15}{5} = -3$$

En consecuencia, la solución del sistema es: $x = 2\ ,\ y = -3$ o también $\{(2, -3)\}$.

9.3 Determinantes de tercer orden

Definición 9.2 ***Determinante de tercer orden***

La ordenación cuadricular

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

se denomina *determinante de tercer orden* y su *valor* o desarrollo es: $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$.

Regla de Sarrus

La regla de Sarrus es un método fácil para memorizar y calcular el determinante de una matriz 3×3. Recibe su nombre del matemático francés Pierre Frédéric Sarrus.

Considérese el determinante 3×3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Se puede calcular de la siguiente manera:

En primer lugar, se repiten las dos primeras columnas de la matriz a la derecha de manera que queden cinco columnas en fila. Después, se suman los productos de las diagonales descendentes y se sustraen los productos de las diagonales ascendentes. Esto resulta en:

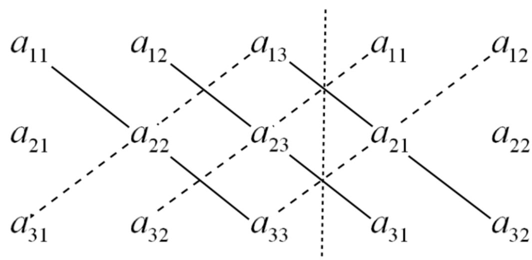


Figura 9.4: La regla de Sarrus: El producto de los números en las diagonales continuas se suman y el producto de los números en las diagonales en trazos se restan.

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}b_{22}c_{31} - a_{23}b_{32}c_{11} - a_{33}b_{12}c_{21}$$

N El término a_{ij} representa al elemento del determinante que se encuentra en la fila i, columna j. Por ejemplo el término a_{23} representa al elemento del determinante que se encuentra en la fila 2, columna 3.

Consideremos un sistema general de ecuaciones lineales en las variables x, y y z así:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = &\quad d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = &\quad d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = &\quad d_3 \end{aligned}$$

Entonces, en forma análoga, los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, los podemos resolver escribiendo:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D}; \; z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{D_z}{D}$$

Cualquiera que sea la incógnita que se despeje su numerador se obtiene sustituyendo en D sus coeficientes por los términos constantes.

Ejemplo 9.13

Resolvamos:

$$\begin{aligned} 3x+2y-z &= 12 \\ x+\ y+z &= 6 \\ x-2y-z &= -2 \end{aligned}$$

Podemos hallar cada uno de los determinantes por separado, esto es:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3\cdot 1\,(-1)+2\cdot 1\cdot 1+-1\cdot 1\,(-2)-(-1)\,1\cdot 1-3\cdot 1\,(-2)-2\cdot 1\,(-1) \\ &= -3+2+2+1+6+2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} D_x &= \begin{vmatrix} 12 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -12-4+12-2+24+12=30 \\ D_y &= \begin{vmatrix} 3 & 12 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -18+12+2+6+6+12=20 \\ D_z &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 12 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -6-24+18-12+36+4=10 \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D}=\frac{30}{10}=3 \\ y &= \frac{D_y}{D}=\frac{20}{10}=2 \\ z &= \frac{D_z}{D}=\frac{10}{10}=1 \end{aligned}$$

Ejercicios 9.1

1. Un videoclub está especializado en películas de tres tipos: infantiles, oeste americano y terror. Se sabe que: el 60 % de las películas infantiles más el 50 % de las del oeste representan el 30 % del

total de las películas. El 20 % de las infantiles más el 60 % de las del oeste más del 60 % de las de terror representan la mitad del total de las películas. Hay 100 películas más del oeste que de infantiles. Halla el número de películas de cada tipo.

2. Los lados de un triángulo miden 26, 28 y 34 cm. Con centro en cada vértice, se dibujan tres conferencias, tangente entre sí dos a dos. Calcula las longitudes de los radios de las circunferencias.

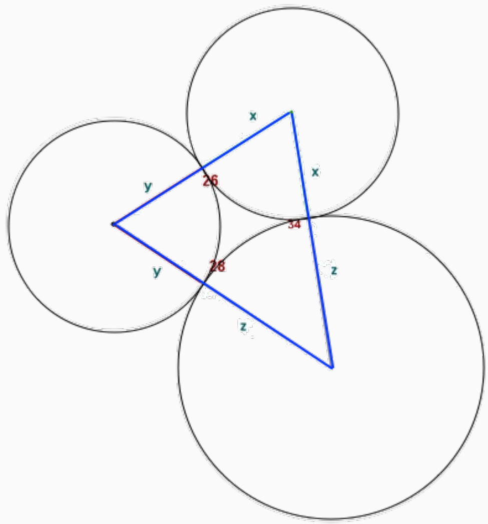


Figura 9.5: Calcula las longitudes de los radios de las circunferencias.

3. Por un rotulador, un cuaderno y una carpeta, se pagan 3,56 euros. Se sabe que el precio del cuaderno es la mitad del precio del rotulador y que el precio de la carpeta es igual al precio del cuaderno más el 20 % del precio del rotulador. Calcula los precios que marcaba cada una de las cosas, sabiendo que sobre esos precios se ha hecho el 10 % de descuento.
4. Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales A, B y C. El primer lingote contiene 20 g del metal A, 20 g del B y 60 del C. El segundo contiene 10 g de A, 40 g de B y 50 g de C. El tercero contiene 20 g de A, 40 g de B y 40 g de C. Queremos elaborar, a partir de estos lingotes, uno nuevo que contenga 15 g de A, 35 g de B y 50 g de C. ¿ Cuántos gramos hay que coger de cada uno de los tres lingotes?
5. Una familia consta de una madre, un padre y una hija. La suma de las edades actuales de los 3 es de 80 años. Dentro de 22 años, la edad del hijo será la mitad que la de la madre. Si el padre es un año mayor que la madre, ¿qué edad tiene cada uno actualmente?
6. El ensayo de la vida de la herramienta en un torno ha arrojado los siguientes datos:
   - Para una velocidad de 350 $pies/min$, el tiempo de vida es de 7 min.
   - Para una velocidad de 250 $pies/min$, el tiempo de vida es de 50 min.

   Teniendo en cuenta lo expuesto en la ecuación 9.3, con estos datos:
   a) Determina los parámetros n y C.
   b) Usando su propia ecuación, calcula la vida de la herramienta que corresponde a una veloci-

dad de corte $v = 300\ pies/min$

c) Usando su propia ecuación, calcule la velocidad de corte que corresponde a una vida de herramienta $T = 10\ min$.

7. Se puede formular una versión mejorada de la ecuación 9.3 para incluir el efecto del avance de la profundidad de corte, esta ecuación es:

$$vT^n f^m = K$$

f es el avance de la profundidad de corte medido en pulgadas y k es una constante que tendrá un significado distinto a C. En una serie de ensayos de torneado, se recopilan los siguientes datos:

- $v = 2{,}0\ m/seg$, $f = 0{,}2\ mm/rev$ y $T = 12\ min$.
- $v = 1{,}5\ m/seg$, $f = 0{,}2\ mm/rev$ y $T = 40\ min$.
- $v = 2{,}0\ m/seg$, $f = 0{,}3\ mm/rev$ y $T = 10\ min$.

Con los datos obtenidos:

a) Determina los valores de n, m y K.

b) Usando su ecuación, calcula la vida de la herramienta cuando $v = 1,5\ m/seg$ y $f = 0{,}3\ mm/rev$.

Intercambiar argumentos con una persona que ha renunciado a la lógica es como darle medicina a un muerto.

Thomas Paine

10. FRACCIONES PARCIALES

Las funciones racionales son aquellas que se pueden expresar como cociente de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$. El método de las fracciones parciales consiste en descomponer un cociente de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en una suma de fracciones de polinomios de menor grado. Se utiliza principalmente en cálculo integral. El requisito más importante es que el grado del polinomio del denominador sea estrictamente mayor que el del numerador.

Si el grado del polinomio del numerador es mayor o igual al del denominador, se debe primero hacer la división de los dos polinomios.

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

Un cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se va a expresar en una suma de expresiones racionales más sencillas, basándose en los casos de factorización de $Q(x)$.
Es sencillo comprobar que $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}$ y al lado derecho de la igualdad, se le llama *descomposición en fracciones parciales*. Es teóricamente posible expresar:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E_1 + E_2 + \ldots\ldots + E_n,$$

donde cada una de las expresiones E_i tiene la forma:

$$\frac{A_i}{(px+q)^i} \quad \text{ó} \quad \frac{A_i x + B_i}{(ax^2+bx+c)^i}$$

utilizando la factorización del polinomio $Q(x)$.

10.1 Caso I: El denominador tiene raíces reales sencillas o repetidas

$Q(x)$ tienes raíces reales sencillas o repetidas, lo que genera el factor $(px+q)^m$,$m \geq 1$.
La descomposición es de la forma:

$$\frac{A_1}{px+q} + \frac{A_2}{(px+q)^2} + ... + \frac{A_i}{(px+q)^i} + ... + \frac{A_m}{(px+q)^m}$$

A_i es número real.

Es decir, tiene tantas fracciones parciales como repetido esté el factor $px+q$. Si el factor no está repetido, habrá entonces una sola fracción parcial (ver ejemplo 10.1).

¿Porqué constantes en el numerador? Porque el grado del polinomio del numerador debe ser menor que el del denominador. Si este es de grado uno, el polinomio del numerador tiene que ser de grado cero y un polinomio de grado cero es una constante.

El que aparezca $(px+q)^m$ está indicando que la raíz $-\frac{q}{p}$ se repite m veces (se llama *raíz de multiplicidad m*) y en consecuencia, el polinomio básico es $px+q$, que al ser de grado uno explica que el numerador sea de grado cero. Para la descomposición en fracciones parciales procedemos así:

i) Se reduce a común denominador (mínimo común múltiplo), se debe obtener el denominador de la fracción propuesta originalmente

ii) Se igualan los numeradores de la fracción original con el numerador cuyas constantes se van a encontrar

iii) Se hallan las constantes por uno de los métodos como se igualan polinomios, dándole valores a la variable o comparando coeficiente a coeficiente.

Ejemplo 10.1

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3-x^2-2x} &= \frac{1}{x(x-2)(x+1)} \\
\frac{1}{x^3-x^2-2x} &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{(x-2)} + \frac{A_3}{(x+1)} \\
\frac{1}{x^3-x^2-2x} &= \frac{A_1(x-2)(x+1)+A_2(x)(x+1)+A_3(x)(x-2)}{x(x-2)(x+1)}
\end{aligned}$$

Ya que los denominadores son iguales podemos igualar los numeradores. Dando valores adecuados a x, podemos eliminar términos para calcular A_1,A_2 y A_3.

$$\begin{array}{rl}
 & 1 = A_1(x-2)(x+1)+A_2(x)(x+1)+A_3(x)(x-2) \\
\text{Si } x=0 & 1 = A_1(-2)(1) \Longrightarrow A_1 = -\dfrac{1}{2} \\
\text{Si } x=2 & 1 = A_2(2)(3) \Longrightarrow A_2 = \dfrac{1}{6} \\
\text{Si } x=-1 & 1 = A_3(-1)(-3) \Longrightarrow A_3 = \dfrac{1}{3}
\end{array}$$

Con lo anterior tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3-x^2-2x} &= \frac{1}{x(x-2)(x+1)}\\ &= \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{(x-2)}+\frac{A_3}{(x+1)}\\ &= -\frac{1}{2x}+\frac{1}{6(x-2)}+\frac{1}{3(x+1)}\end{aligned}$$

Ejemplo 10.2

$$\begin{aligned}\frac{1-x}{(x+3)(2-3x)^3} &= \frac{A_1}{(x+3)}+\frac{A_2}{(2-3x)}+\frac{A_3}{(2-3x)^2}+\frac{A_4}{(2-3x)^3}\\ &= \frac{A_1(2-3x)^3+A_2(2-3x)^2(x+3)+A_3(2-3x)(x+3)+A_4(x+3)}{(x+3)(2-3x)^3}\end{aligned}$$

Igualamos numeradores:

$$1-x=A_1(2-3x)^3+A_2(2-3x)^2(x+3)+A_3(2-3x)(x+3)+A_4(x+3)$$

$$\text{Si } x=\frac{2}{3}\Longrightarrow\frac{1}{3}=A_4(\frac{2}{3}+3)\Longrightarrow A_4=\frac{1}{11}$$
$$\text{Si } x=-3\Longrightarrow 4=A_1(11)^3\Longrightarrow A_1=\frac{4}{(11)^3}$$

Como ya no disponemos de más raíces del denominador, que son las que más facilitan los cálculos, se puede usar una de las dos alternativas siguientes:

a) Remplazar A_1 y A_4 por sus valores y luego desarrollar todo para comparar coeficiente a coeficiente:

$$1-x=\frac{4}{(11)^3}(2-3x)^3+A_2(2-3x)^2(x+3)+A_3(2-3x)(x+3)+\frac{1}{11}(x+3)$$

desarrollando

$$\begin{aligned}1-x &= \frac{4}{(11)^3}(8-36x+54x^2-27x^3)+A_2(9x^3+15x^2-32x+12)+A_3(-3x^2-7x+\\ &= \frac{32}{(11)^3}-\frac{144}{(11)^3}x+\frac{216}{(11)^3}x^2-\frac{108}{(11)^3}x^3+9A_2x^3+15A_2x^2-32A_2x+12A_2\\ &\quad -3A_3x^2-7A_3x+6A_3+\frac{1}{11}x+\frac{3}{11}\end{aligned}$$

Agrupamos términos

$$1-x=x^3\left(-\frac{108}{11^3}+9A_2\right)+x^2\left(\frac{216}{11^3}+15A_2-3A_3\right)+x\left(-\frac{144}{11^3}-32A_2-7A_3+\frac{1}{11}\right)$$
$$+\frac{32}{11^3}+12A_2+6A_3+\frac{3}{11}$$

Como dos polinomios son iguales si y sólo si sus coeficientes respectivos lo son, nos queda que:

$$\begin{aligned}
-\frac{108}{(11)^3}+9A_2 &= 0\\
A_2 &= \frac{12}{(11)^3}\\
\frac{216}{(11)^3}+15A_2-3A_3 &= 0\\
\frac{216}{(11)^3}+\frac{180}{(11)^3}-3A_3 &= 0\\
A_3 &= \frac{132}{(11)^3}
\end{aligned}$$

Si se hicieron las cosas bien, remplazando A_2 y A_3 por los valores encontrados

$$1=\frac{32}{(11)^3}+\frac{144}{(11)^3}+\frac{792}{(11)^3}+\frac{3}{11}=\frac{32+144+792+363}{1331}=1$$

de la constante

$$-1=-\frac{144}{(11)^3}-\frac{384}{(11)^3}-\frac{924}{(11)^3}+\frac{1}{11}=\frac{-144-384-924+121}{1331}=-1$$

del coeficiente de x.

b) Después de remplazar A_1 y A_4 por sus respectivos valores, se forma un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas A_2 y A_3 y se le da a x dos valores cualquiera (diferentes de -3 y de $\frac{2}{3}$).

Por ejemplo para $x=0$

$$\begin{aligned}
1-x &= \frac{4}{(11)^3}(2-3x)^3+A_2(2-3x)^2(x+3)+A_3(2-3x)(x+3)+\frac{1}{11}(x+3)\\
1 &= \frac{4}{(11)^3}(2)^3+12A_2+6A_3+\frac{3}{11}
\end{aligned}$$

para x=1

$$0=-\frac{4}{(11)^3}+4A_2-4A_3+\frac{4}{11}$$

Con lo cual, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases}
12A_2+6A_3=\dfrac{936}{(11)^3}\\[2ex]
4A_2-4A_3=-\dfrac{480}{(11)^3}
\end{cases}$$

Encontramos que $A_3 = \dfrac{132}{11^3}$ y $A_2 = \dfrac{12}{11^3}$. Ahora:

$$\begin{aligned}\frac{1-x}{(x+3)(2-3x)^3} &= \frac{A_1}{(x+3)} + \frac{A_2}{(2-3x)} + \frac{A_3}{(2-3x)^2} + \frac{A_4}{(2-3x)^3} \\ &= \frac{4}{11^3(x+3)} - \frac{12}{11^3(2-3x)} + \frac{132}{11^3(2-3x)} + \frac{1}{11(2-3x)^2}\end{aligned}$$

10.2 Caso II: El denominador tiene raíces complejas

$Q(x)$ **tiene raíces complejas, lo que produce un factor cuadrático irreducible** $(ax^2+bx+c)^m$**;** **m**≥ 1.
La descomposición será en la forma:

$$\frac{C_1x+D_1}{ax^2+bx+c} + \frac{C_2x+D_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots\ldots + \frac{C_mx+D_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

Es decir, tantas fracciones parciales como repetido esté el factor cuadrático.
Esta vez, el polinomio del denominador es de grado dos (irreducible, puesto que no se puede factorizar en $\mathbb{R}$); razón por la que el polinomio del numerador es de grado menor; el polinomio más general de grado menor es el lineal o de grado uno.

Ejemplo 10.3

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{A_2}{(x-1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)}$$

Sabiendo que el denominador tiene que ser el mínimo común múltiplo para que sea el denominador de la fracción original:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4-1} &= \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{A_2}{(x-1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)} \\ &= \frac{A_1(x-1)(x^2+1)+A_2(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1}\end{aligned}$$

entonces se iguala el denominador:

$$1 = A_1(x-1)(x^2+1)+A_2(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1) \tag{10.1}$$

Se remplaza ciertos valores de x en la ecuación (10.1) y nos queda que:
Para $x=1 \Longrightarrow 1 = A_2(4) \Longrightarrow A_2 = \dfrac{1}{4}$

Para $x=-1 \Longrightarrow 1 = A_1(-4) \Longrightarrow A_1 = -\dfrac{1}{4}$

Para $x=0 \Longrightarrow 1 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} - D \Longrightarrow\ D = -1$

Para $x=2 \Longrightarrow 1=-\frac{5}{4}+\frac{15}{4}+6C-3 \Longrightarrow\ 6C=\frac{3}{2} \Longrightarrow C=9$, luego

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{9x-1}{x^2+1}$$

Ejemplo 10.4

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{(x^2+x+1)^2} &= \frac{C_1x+D_1}{(x^2+x+1)}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{(C_1x+D_1)(x^2+x+1)+(C_2x+D_2)}{(x^2+x+1)^2} \end{aligned}$$

Entonces:

$$x^3=(C_1x+D_1)(x^2+x+1)+(C_2x+D_2).$$

No se dispone de ninguna raíz real, por lo tanto, efectuamos el producto para comparar coeficientes.

$$\begin{aligned} x^3 &= C_1x^3+C_1x^2+C_1x+D_1x^2+D_1x+D_1+C_2x+D_2 \\ &= x^3(C_1)+x^2(C_1+D_1)+x(C_1+D_1+C_2)+(D_1+D_2) \end{aligned}$$

comparamos coeficientes:
$C_1=1$
$C_1+D_1=0 \Longrightarrow D_1=-1$
$C_1+D_1+C_2=0 \Longrightarrow C_2=0$
$D_1+D_2=0 \Longrightarrow D_2=1$
Finalmente, se sustituye:

$$\frac{x^3}{(x^2+x+1)^2}=\frac{C_1x+D_1}{(x^2+x+1)}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+x+1)^2}=\frac{x-1}{x^2+x+1}+\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$$

Ejercicios 10.1 Expresar las siguientes fracciones en fracciones parciales

1. $\dfrac{x-7}{x^2-25}$
2. $\dfrac{x-3}{x^2-14x+49}$
3. $\dfrac{x^2+1}{(x+2)^2}$
4. $\dfrac{x-1}{x^2+6x}$
5. $\dfrac{x^2-1}{x^3+8x}$
6. $\dfrac{4x+2}{x^2-36}$
7. $\dfrac{5x-3}{x^2-16x+64}$
8. $\dfrac{x+2}{(x+4)^2}$
9. $\dfrac{x-1}{x^2+7x}$
10. $\dfrac{x^2+1}{x^3+x}$
11. $\dfrac{4x+2}{x^2-36}$
12. $\dfrac{5x-3}{x^2+16x+64}$
13. $\dfrac{x^2+1}{(x-4)^2}$
14. $\dfrac{x-1}{x^2-7x}$
15. $\dfrac{x^2+5}{x^3-2x}$
16. $\dfrac{4x-2}{x^2-64}$
17. $\dfrac{5x+3}{x^2+18x+81}$
18. $\dfrac{x^2+7}{(x-7)^2}$
19. $\dfrac{x+1}{x^2+8x}$
20. $\dfrac{x^2-5}{x^3-2x}$
21. $\dfrac{3x-1}{x^2-9}$
22. $\dfrac{x-4}{x^2+4x+4}$
23. $\dfrac{x^2+11}{(x+2)^3}$
24. $\dfrac{6x+1}{x^2+2x}$
25. $\dfrac{4x-1}{x^3+2x}$
26. $\dfrac{x+5}{x^2-16}$
27. $\dfrac{2x-5}{x^2+10x+25}$
28. $\dfrac{x^2+3}{(x+1)^3}$
29. $\dfrac{2x-1}{x^2+4x}$
30. $\dfrac{x-1}{x^3+6x}$

Many who have had an opportunity of knowing any more about mathematics confuse it with arithmetic, and consider it an arid science. In reality, however, it is a science which requires a great amount of imagination.

(Sofia Kovalevskaya)

11. DESIGUALDADES

11.1 Desigualdades, propiedades y ejemplos[1]

Una condición en x es una expresión que contiene la variable x y se transforma en una proposición matemática, es decir, en una afirmación que es verdadera o falsa, cuando se sustituye x por un elemento del dominio en consideración, en nuestro caso, por un número real. El conjunto de elementos del dominio que hacen de la condición una proposición verdadera se llama el *conjunto solución* de la condición.

La mayoría de las condiciones que se presentan en matemáticas tienen la forma de una ecuación o de una desigualdad. En esta sección, estudiaremos algunas desigualdades y sus soluciones.

Resolver una desigualdad es encontrar su conjunto solución; en otras palabras, encontrar todos los números reales que la hacen verdadera. El procedimiento para resolver desigualdades consiste en transformarlas en desigualdades equivalentes, esto es, desigualdades que tienen las mismas soluciones, hasta que el conjunto solución sea obvio. Las herramientas para este trabajo son las propiedades del orden entre los números reales. Por su uso tan frecuente, recordamos las siguientes:

- Si $x<y$, entonces, $x+z<y+z$ para $z\in\mathbb{R}$.
- Si $x<y$ y $z>0$, entonces, $xz<yz$ y $\frac{x}{z}<\frac{y}{z}$.
- Si $x<y$ y $z<0$, entonces, $xz>yz$ y $\frac{x}{z}>\frac{y}{z}$.

Ejemplo 11.1

Resolvamos la desigualdad:

$$2x+7\leq 5x-6$$

[1] Adaptado de http://www.virtual.unal.edu.co/unvPortal/courses/CoursesViewer.do?reqCode=viewOfFacultys

Las siguientes desigualdades son equivalentes:

$$
\begin{aligned}
2x+7 \leq 5x-6 &\qquad \text{Desigualdad dada.}\\
-3x+7 \leq -6 &\qquad \text{Sumando } -5x.\\
-3x \leq -13 &\qquad \text{Sumando } -7.\\
x \geq \frac{13}{3} &\qquad \text{Multiplicando por } -\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad es el intérvalo $\left[\frac{13}{3},\infty\right)$, que se muestra en la figura 11.1.

Figura 11.1: conjunto solución de la desigualdad $2x+7 \leq 5x-6$.

Ejemplo 11.2

Resolvamos la desigualdad:

$$-5 < 4x+1 < 9$$

Aunque la desigualdad dada es equivalente a las dos desigualdades:

$$-5 < 4x+1 \quad \text{y} \quad 4x+1 < 9,$$

las podemos resolver simultáneamente de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
-5 < 4x+1 < 9 &\qquad \text{Desigualdad dada.}\\
-6 < 4x < 8 &\qquad \text{Sumando } -1.\\
-\frac{6}{4} < x < \frac{8}{4} &\qquad \text{Multiplicando por } \frac{1}{4}.\\
-\frac{3}{2} < x < 2 &\qquad \text{Realizando las operaciones.}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad es el intérvalo $\left(-\frac{3}{2},2\right)$.

Ejemplo 11.3

Resolvamos la desigualdad:

$$x^2-10x+21 > 0$$

La desigualdad es equivalente a:

$$(x-7)(x-3) > 0$$

El producto $(x-7)(x-3)$ puede cambiar de signo solo en 7 o en -3, que son los puntos donde $x-7=0$ o $x-3=0$. Estos puntos los podemos llamar *puntos de separación* y nos dividen la recta en tres intérvalos:

$$(-\infty,3), \qquad (3,7) \qquad \text{y} \qquad (7,\infty).$$

En cada uno de estos intérvalos, $(x-7)(x-3)$ conserva el signo, es decir, siempre es positivo o siempre es negativo. Para determinar el signo en cada intérvalo usamos un punto de prueba, elegido dentro del intérvalo. Por ejemplo si tomamos $x=0$ en el intérvalo $(-\infty,3)$ los valores de $(x-7)$ y $(x-3)$ son ambos negativos y por lo tanto, $(x-7)(x-3) > 0$ en este intérvalo. Similarmente, se procede con los otros intérvalos. Los resultados se pueden expresar en una tabla de signos como la siguiente:

Intérvalo	$(-\infty,3)$	$(3,7)$	$(7,\infty)$
Signo de $(x-7)$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x-3)$	$-$	$+$	$+$
Signo de $(x-7)(x-3)$	$+$	$-$	$+$

El signo $(x-7)(x-3)$ se obtiene aplicando las reglas de los signos. Por lo tanto, vemos que la solución de la desigualdad es $(-\infty,3)\cup(7,\infty)$.

Una manera más práctica de resolver esta desigualdad es elaborando un diagrama de signos, como se muestra a continuación, en la figura 11.2.

Figura 11.2: Diagrama de signos para la solución de $x^2-10x+21>0$.

En el diagrama, las líneas verticales corresponden a los puntos de separación y la recta horizontal es la recta real.

Ejemplo 11.4

Resolvamos la desigualdad:

$$(2x+3)(4-x)(x+5) \leq 0$$

Elaboramos un diagrama de signos. Primero obtenemos los puntos de separación resolviendo las ecuaciones $2x+3=0$, $4-x=0$ y $x+5=0$. Los puntos de separación son $-\frac{3}{2}$, 4 y -5. Así tenemos el siguiente diagrama (ver figura **??**).
Analizando el signo resultante, es decir, el signo de $(2x+3)(4-x)(x+5)$, vemos que la solución de la desigualdad dada es:

$$\left[-5,-\frac{3}{2}\right]\cup[4,\infty)$$

Ejemplo 11.5

Resolvamos la desigualdad:

$$\frac{3x-1}{x+4}>2$$

La desigualdad es equivalente a cada una de las siguientes:

$$\begin{aligned}\frac{3x-1}{x+4}-2&>0\\ \frac{(3x-1)-2(x+4)}{x+4}&>0\\ \frac{x-9}{x+4}&>0\end{aligned}$$

Si elaboramos el diagrama de signos (ver figura 11.4), tenemos:

Figura 11.4: Diagrama de signos para la solución de $\frac{3x-1}{x+4}>2$

Por lo tanto la solución de la desigualdad es $(-\infty,-4)\cup(9,\infty)$.

11.2 Desigualdades cuadráticas

Una desigualdad se llama cuadrática si tiene alguna de las formas siguientes:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &> 0 \\ ax^2+bx+c &\geq 0 \\ ax^2+bx+c &\leq 0 \\ ax^2+bx+c &< 0 \end{aligned}$$

con $a \neq 0$.
Antes de indicar cómo se resuelven estas desigualdades, recordamos que las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, donde $a \neq 0$ son:

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad r_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Además, fácilmente se verifica que r_1 y r_2 satisfacen las siguientes relaciones:

$$r_1+r_2 = -\frac{b}{a}, \qquad r_1r_2 = \frac{c}{a} \qquad \text{y} \qquad ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2)$$

La última fórmula nos proporciona un método para factorizar cualquier trinomio de la forma ax^2+bx+c en todos los casos posibles.

Veamos ahora como se resuelven las desigualdades cuadráticas. Una primera simplificación que podemos hacer es suponer que $a > 0$, pues en caso contrario, multiplicando la desigualdad por -1, esta se transforma en otra desigualdad cuadrática con $a > 0$.

Se presentan dos casos:

- Si $b^2-4ac \geq 0$. En este caso, la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ tiene raíces reales r_1 y r_2. Podemos factorizar el trinomio ax^2+bx+c en la forma $a(x-r_1)(x-r_2)$ y la desigualdad se resuelve como vimos en un ejemplo anterior.
- Si $b^2-4ac < 0$. En este caso las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ no son reales, sino complejas y la factorización $a(x-r_1)(x-r_2)$ no sirve para resolver la desigualdad.

Para resolver la desigualdad, en este caso, procedemos de la siguiente forma: Completamos el cuadrado:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a(x^2+\frac{b}{a}x)+c \\ &= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c \\ &= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right) \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \end{aligned}$$

En consecuencia, las desigualdades cuadráticas se transforman, en su orden, en:

$$
\begin{aligned}
a(x+\frac{b}{2a})^2 &> \frac{b^2-4ac}{4a}\\
a(x+\frac{b}{2a})^2 &\geq \frac{b^2-4ac}{4a}\\
a(x+\frac{b}{2a})^2 &\leq \frac{b^2-4ac}{4a}\\
a(x+\frac{b}{2a})^2 &< \frac{b^2-4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

Como estamos suponiendo que $a>0$ y sabemos que $b^2-4ac<0$, las dos primeras desigualdades son válidas para todo número real y las dos últimas, para ninguno.

Ejemplo 11.6

Resolvamos la desigualdad:

$$3x^2-10x+2 \leq 0$$

En este caso, $b^2-4ac=(-10)^2-4\cdot 3\cdot 2=76\geq 0$. Por ello, se infiere que la ecuación $3x^2-10x+2=0$ tiene raíces reales, que son:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{10+\sqrt{76}}{6}=\frac{10+2\sqrt{19}}{6}=\frac{5+\sqrt{19}}{3} \qquad \text{y}\\
r_2 &= \frac{10-\sqrt{76}}{6}=\frac{10-2\sqrt{19}}{6}=\frac{5-\sqrt{19}}{3}
\end{aligned}
$$

Luego, la factorización de $3x^2-10x+2$ es:

$$3x^2-10x+2=3\left[x-\left(\frac{5+\sqrt{19}}{3}\right)\right]\left[x-\left(\frac{5-\sqrt{19}}{3}\right)\right],$$

y la desigualdad original es equivalente a:

$$3\left[x-\left(\frac{5+\sqrt{19}}{3}\right)\right]\left[x-\left(\frac{5-\sqrt{19}}{3}\right)\right]\leq 0$$

Elaboramos el diagrama de signos:
Vemos que la solución de la desigualdad es el intérvalo

$$\left[\frac{5-\sqrt{19}}{3},\frac{5+\sqrt{19}}{3}\right]$$

Ejemplo 11.7

Resolvamos la desigualdad $2x^2+4x+5\geq 0$. En este caso, tenemos que $b^2-4ac=4^2-4\cdot 2\cdot 5=-24<0$. Por lo tanto, la ecuación $2x^2+4x+5=0$ no tiene raíces reales y de acuerdo con la teoría desarrollada, el conjunto solución de la desigualdad $2x^2+4x+5\geq 0$ es todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo 11.8

Resolvamos la desigualdad $-5x^2+7x-6>0$.
La desigualdad es equivalente a $5x^2-7x+6<0$.
Para esta última desigualdad, tenemos que $b^2-4ac=(-7)^2-4\cdot 5\cdot 6=-71<\dot{0}$. En consecuencia, la ecuación $5x^2-7x+6=0$ no tiene raíces reales y de acuerdo a la teoría desarrollada, el conjunto solución de la desigualdad $5x^2-7x+6<0$ es $\emptyset$. Es decir, la desigualdad original $-5x^2+7x-6>0$ no tiene soluciones reales.

Para terminar esta sección, recalcamos que cuando $a>0$ y $b^2-4ac<0$, las desigualdades cuadráticas tienen como conjunto solución todo $\mathbb{R}$, o no tienen soluciones reales.

11.3 Desigualdades con valor absoluto

En la sección 3.2, definimos el valor absoluto de un número real x, que representamos por $|x|$, mediante:

$$|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

También observamos que $|x|$ representa la distancia del origen al punto x y de forma más general, $|x_1-x_2|$ representa la distancia entre x_1 y x_2.

Las propiedades siguientes del valor absoluto nos indican que este se comporta muy bien con respecto a la multiplicación y la división, pero no así con relación a la adición y la sustracción.

11.3.1 Propiedades del valor absoluto

Si x y y son números reales arbitrarios, entonces:

i) $|-x|=|x|$
ii) $|xy|=|x|\,|y|$
iii) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$, $y\neq 0)$
iv) $|x+y|\leq |x|+|y|$ (Desigualdad triangular)
v) $|x|-|y|\leq |x-y|$ y $|y|-|x|\leq |x-y|$

La interpretación geométrica de $|x|$ nos proporciona una justificación de las siguientes dos propiedades. Sea $a\geq 0$. Entonces:

i) $|x| \leq a$ es equivalente a $-a \leq x \leq a$

i) $|x| \geq a$ es equivalente a $x \geq a$ o $x \leq -a$

Gráficamente tenemos

Figura 11.6: La interpretación geométrica de $|x| \leq a$ y $|x| \geq a$

iii) $|x| \leq |y|$ es equivalente a $x^2 \leq y^2$

En las propiedades (11.3.1) a (11.3.1) el símbolo $\leq$ puede remplazarse por $<$.

La representación geométrica es de gran utilidad en la resolución de problemas y en la visualización de muchas propiedades importantes de los números reales.

Ahora bien, es útil introducir la noción de intérvalo.

Definición 11.1

[*Intérvalo*] Si a y b son números reales, definimos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}
\end{aligned}$$

Los conjuntos así definidos se llaman en su orden, *intérvalo abierto de extremos a y b*, *intérvalo cerrado de extremos a y b*, *intervaloabierto-cerrado* (o semiabiero a la izquierda) de extremos a y b e *intérvalo cerrado-abierto* (o semi abierto a la derecha) de extremos a y b .

Geométricamente, podemos representar estos intérvalos sobre la recta real, como se indica en las siguientes figuras

Figura 11.7: Representación gráfica de los intérvalos. 1) Intérvalo abierto, 2) Intérvalo semiabierto a la izquierda, 3) Intérvalo Cerrado, 4) Intérvalo semi abierto a la derecha.

Un paréntesis cuadrado en la figura indica que el extremo correspondiente pertenece al intérvalo. Se acostumbra a ampliar el concepto de intervalo para incluir los siguientes conjuntos, conocidos con el nombre de *intérvalos infinitos*:

$$\begin{aligned}(a,\infty) &= \{x\in\mathbb{R} \mid x>a\}\\ [a,\infty) &= \{x\in\mathbb{R} \mid x\geq a\}\\ (-\infty,a) &= \{x\in\mathbb{R} \mid x<a\}\\ (-\infty,a] &= \{x\in\mathbb{R} \mid x\leq a\}\end{aligned}$$

Ejemplo 11.9

Resolvamos la desigualdad:

$$|3-4x|\leq 7$$

Utilizando la propiedad (11.3.1), tenemos la siguiente cadena de desigualdades equivalentes:

$$\begin{aligned}&|3-4x|\leq 7\\ &-7\leq 3-4x\leq 7\\ &-10\leq -4x\leq 4\\ &-\frac{10}{4}\leq -x\leq 1\\ &\frac{10}{4}\geq x\geq -1\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución de la desigualdad es el intérvalo $\left[-1,\frac{10}{4}\right]$.

Ejemplo 11.10

Resolvamos la desigualdad:

$$|5x+14|>10$$

La propiedad (11.3.1) nos dice que la desigualdad es equivalente a:

$$5x+14>10 \qquad \text{o} \qquad 5x+14<-10$$

Procedemos a resolver:

$$5x>-4 \qquad \text{o} \qquad 5x<-24$$

o sea,

$$x>-\frac{4}{5} \qquad \text{o} \qquad x<-\frac{24}{5}.$$

Por lo tanto, la solución de la desigualdad dada es $\left(-\infty,-\frac{24}{5}\right)\cup\left(-\frac{4}{5},\infty\right)$.

Ejemplo 11.11

Resolvamos la desigualdad:

$$\left|\frac{2x-1}{x+3}\right| \geq 3$$

Utilizando la propiedad (11.3.1) del valor absoluto, tenemos la siguiente cadena de desigualdades equivalentes:

$$\begin{aligned} \left|\frac{2x-1}{x+3}\right| &\geq 3 \\ \frac{|2x-1|}{|x+3|} &\geq 3 \\ |2x-1| &\geq 3\,|x+3| \\ (2x-1)^2 &\geq 9(x+3)^2 \\ (2x-1)^2-9(x+3)^2 &\geq 0 \\ [(2x-1)-3(x+3)][(2x-1)+3(x+3)] &\geq 0 \\ (-x-10)(5x+8) &\geq 0 \end{aligned}$$

Elaborando un diagrama de signos, tenemos que la solución de la desigualdad es $\left[-10,-\frac{8}{5}\right]$.

Ejercicios 11.1

1. Resuelve las siguientes inecuaciones, expresando su conjunto solución como conjunto, gráficamente y como intérvalo.
   a) $5x-4<3x+5$
   b) $\dfrac{x-5}{3}+\dfrac{3x+1}{2} \geq \dfrac{x+3}{6}$
   c) $\dfrac{2x-1}{5}-\dfrac{3x+1}{3} > \dfrac{x-5}{10}$
   d) $\dfrac{2x-7}{4}+\dfrac{x+4}{2} \leq \dfrac{3x-1}{8}-\dfrac{x-3}{6}$
   e) $\dfrac{2x-3}{6} \geq \dfrac{x+5}{3}-\dfrac{x-4}{4}$
2. Un estudiante desea obtener una calificación definitiva mayor que 4.0 y menor que 4.5. Si la evaluación consta de cinco exámenes de igual valor y en los cuatro primeros obtuvo las notas 4,1, 3,9, 4,5 y 3,1, ¿En qué rango debe estar la calificación del quinto examen para lograr su cometido?
3. ¿Para que números es la suma del número y su recíproco mayor que 2?
4. Sabiendo que los tres jugadores más altos de un equipo de baloncesto tienen un promedio de estatura de 1.96 metros, ¿qué promedio de estatura deben alcanzar los dos jugadores más bajos del equipo si el promedio del equipo debe ser por lo menos de 1,92 metros?
5. Durante cierto período, la temperatura en grados Celsius varió entre 25 y 30. ¿Cuál fue el intérvalo

en grados Fahrenheit para este período?. $\left(F = \frac{9}{5}C + 32\right)$

6. Para determinar el coeficiente intelectual de una persona se usa la fórmula: $I = \frac{100M}{C}$, donde I es el coeficiente intelectual, M es la edad mental (determinada mediante un test) y C es la edad cronológica. Si la variación de I de un grupo de niños de 11 años está dada por $80 \leq I \leq 140$, encuentra el intérvalo de edad mental de este grupo.
7. Un furgón pesa 875 kg. La diferencia entre el peso del furgón vacío y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior que 415 kg. Si hay que cargar cuatro cajones iguales de idéntico peso, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder llevarlos en ese furgón?.
8. Halla el conjunto solución de:
   a) $\frac{x-3}{x+2} < 0$
   b) $\frac{2x-1}{x-2} \geq 0$
   c) $\frac{3x-2}{2x+1} > 0$
9. Resuelve cada una de las siguientes inecuaciones. Expresa, en caso de ser posible, el conjunto solución usando la notación de intérvalos y construye la gráfica.
   a) $|x+3| > 4$
   b) $\frac{1}{5} - 2|x+1| \leq 0$
   c) $|3-x| > -2$
   d) $-\frac{1}{4}|3-2x| + 3 \geq 1$
   e) $|2x-1| < 3$
   f) $\left|\frac{2-x}{4}\right| - 1 \geq 0$
   g) $|x+4| + 3 \leq 0$
   h) $\left|\frac{x}{4} - 5\right| \leq 0$
10. hallar el conjunto solución de la desigualdad dada y represéntala gráficamente.
   a) $5x+2 > x-6$
   b) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \leq 0$
   c) $13 \geq 2x-3 \geq 5$
   d) $x^2 > 4$
   e) $x^2 + 8x > -15$
   f) $4x^2 + 9x < 9$
   g) $\frac{x^2-x-2}{x+3} \leq 0$

Parte III

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

12. GEOMETRÍA

12.1 Polígonos

EN geometría, un *polígono* es una figura plana compuesta por una secuencia finita de *segmentos rectos* consecutivos que cierran una región en el plano. Estos segmentos son llamados *lados*, y los puntos en que se intersecan se llaman *vértices*. El interior del polígono es llamado área. La palabra *polígono* deriva del griego antiguo *polúgonos*, a su vez formado por (polú) *muchos* y (gonía) ángulo, aunque hoy en día los polígonos son usualmente entendidos por el número de sus lados.

A menudo, en ingeniería solo interesan las líneas poligonales cerradas y los polígonos simples (aquellos en los cuales sus lados solo se intersecan en los vértices); pueden definir un polígono de acuerdo con ello. Es requisito geométrico que dos lados que se intersecan en un vértice formen un ángulo no llano (distinto a $180°$), ya que de otra manera los segmentos se considerarían partes de un lado único; sin embargo, esos vértices podrían permitirse algunas veces.

Definición 12.1 ***Línea poligonal***

Se denomina *línea poligonal* al conjunto de segmentos unidos sucesivamente por sus extremos (el extremo de cada segmento es origen del siguiente), tal que dos segmentos sucesivos no están alineados (en tal caso se considera como un único segmento).

Las líneas poligonales pueden ser abiertas o cerradas, un *polígono* está conformado por una línea poligonal cerrada.

Definición 12.2

En un polígono se pueden distinguir los siguientes elementos geométricos:

- Lado (L): es cada uno de los segmentos que conforman el polígono.
- Vértice (V): es el punto de intersección (punto de unión) de dos lados consecutivos.
- Diagonal (d): es el segmento que une dos vértices no consecutivos.

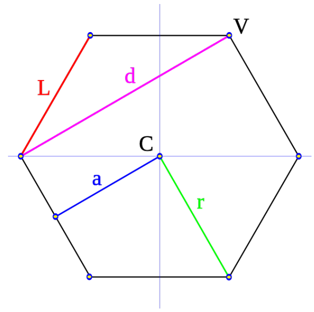


Figura 12.1: Hexágono regular.

- Perímetro (P): es la suma de las longitudes de todos los lados del polígono.
- Semiperímetro (SP): es la mitad del perímetro.
- ’Angulo interior (AI): es el ángulo formado, internamente al polígono, por dos lados consecutivos.
- Ángulo exterior (AE): es el ángulo formado, externamente al polígono, por un lado y la prolongación de un lado consecutivo.
- Interior de un polígono es el conjunto de todos los puntos que están en el interior de la región que delimita dicho polígono. El interior es un abierto del plano.
- Exteriorde un polígono es el conjunto de los puntos que no están en la poligonal (frontera) ni en el interior.

En un polígono regular se puede distinguir, además:

Definición 12.3

- Centro (C): es el punto equidistante de todos los vértices y lados.
- Ángulo central (AC): es el formado por dos segmentos de recta que parten del centro a los extremos de un lado.
- Apotema (a): es el segmento que une el centro del polígono con el centro de un lado; es perpendicular a dicho lado.
- Diagonales: son segmentos que unen dos vértices no consecutivos. El número de diagonales de un polígono de n lados esta dado por la fórmula:

$$N_d = \frac{n(n-3)}{2}$$

- Intersecciones de diagonales: es el número de veces que se intersectan las diagonales. El número N_I de intersecciones de diagonales en un polígono de n vértices; esta dado por:

$$N_I = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

12.1.1 Clasificación de polígonos

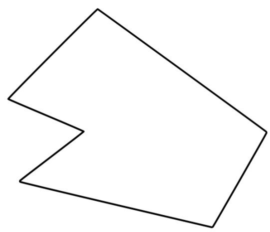
Los polígonos se clasifican por el número o bien, por la forma de su contorno.

Clasificación de polígonos según el número de lados

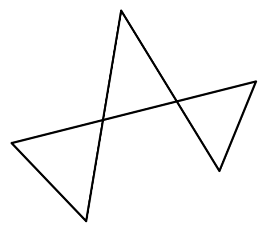
- Trígono, triángulo, 3 lados
- Tetrágono, cuadrángulo, cuadrilátero, 4 lados
- Pentágono, 5 lados.
- hexágono, 6 lados.
- heptágono, 7 lados.
- Octógono u octágono, 8 lados.
- Eneágono o nonágono, 9 lados.
- Decágono, 10 lados.
- Endecágono o undecágono, 11 lados.
- Dodecágono, 12 lados.
- Tridecágono, 13 lados.
- Tetradecágono, 14 lados.
- Pentadecágono, 15 lados.
- hexadecágono, 16 lados.
- Heptadecágono, 17 lados.
- Octodecágono, 18 lados.
- Eneadecágono, 19 lados.
- isodecágono, icoságono , 20 lados.
- Triacontágono, 30 lados.
- Tetracontágono, 40 lados.
- Pentacontágono, 50 lados.
- Hexacontágono, 60 lados.
- Heptacontágono , 70 lados.
- Octocontágono, 80 lados.
- Eneacontágono, 90 lados.
- Hectágono, 100 lados.
- Chiliágono, 1000 lados.
- Miriágono, 10000 lados.
- Decemiriágono, 100000 lados.
- Hectamiriágono, megágono, 1000000 lados.
- Apeirógono, ∞ lados.

Clasificación de polígonos según la forma de su contorno

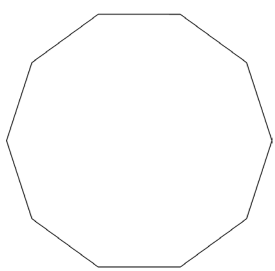
- Simple, si ningún par de aristas no consecutivas se corta. Equivalentemente, su frontera tiene un solo contorno.
- Complejo, si dos de sus aristas no consecutivas se intersecan.
- Convexo, si tiene todos sus ángulos internos menores que 180°. O bien, si un segmento que une dos puntos cualesquiera del polígono yace en el interior de este.
- Cóncavo, si al atravesarlo una recta puede cortarlo en más de dos puntos; es el que tiene uno o varios ángulos mayores que 180°.
- Equilátero, si tiene todos sus lados iguales.
- Equiángulo, si tiene todos sus ángulos iguales.
- Regular, si es equilátero y equiángulo a la vez.
- Irregular, si tiene sus ángulos y lados desiguales.
- Cruzado, es un polígono plano que tiene dos lados no consecutivos secantes. Por ejemplo una 'equis' que tiene unidos sus 'extremos' por dos lados que no se cortan.
- Ortogonal o isotético, si todos sus lados son paralelos a los ejes cartesianos x o y
- Alabeado, si sus lados no están en el mismo plano.
- Estrellado, si se construye a partir de trazar diagonales en polígonos regulares. Se obtienen diferentes construcciones dependiendo de la unión de los vértices: de dos en dos, de tres en tres, etc.



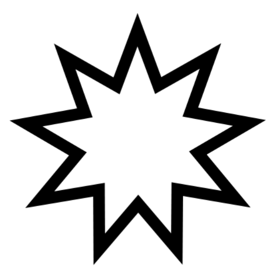
(a) Polígono simple, cóncavo e irregula.



(b) Polígono complejo, cóncavo e irregular.



(c) Polígono convexo y regular (equilátero y equiángulo).



(d) Polígono estrellado.

Figura 12.2: Clasificación de polígonos según su contorno.

12.2 Triángulos

Definición 12.4 ***triángulo***

Un triángulo es un polígono de tres lados. La notación que se utiliza habitualmente es nombrar a sus vértices con las letras mayúsculas A, B y C (pero pueden ser otras, siempre que sean mayúsculas) y a los lados opuestos a estos vértices, con las respectivas minúsculas, tal como se observa en la figura 12.3.

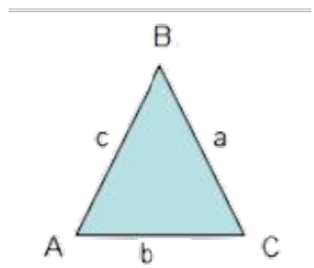
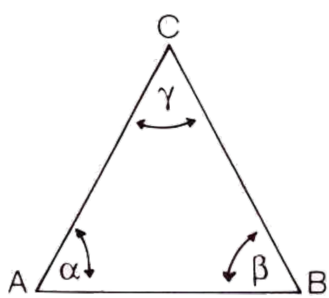


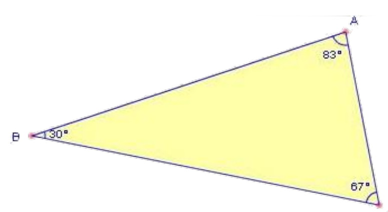
Figura 12.3: Triángulo.

12.2.1 Propiedades de los triángulos

i) La suma de sus ángulos interiores es 180°. La figura 12.4 nos ilustra esta propiedad.



(a) La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°. $\measuredangle\alpha + \measuredangle\beta + \measuredangle\gamma = 180°$

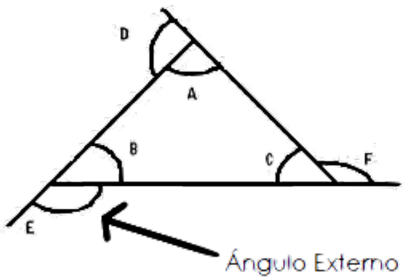


(b) $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 83° + 30° + 67° = 180°$

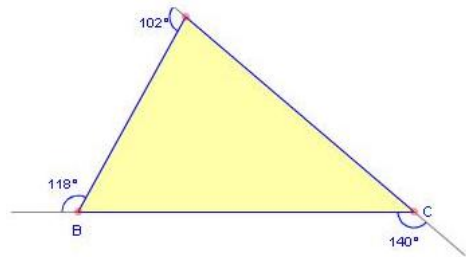
Figura 12.4: Propiedades de ángulos internos de triángulos.

ii) La suma de sus ángulos exteriores es 360°. Esto queda representado de a través de las figuras 12.5.

iii) Ángulo exterior de un triángulo. Cada ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a él (o sea sus opuestos). Queda más claro en la siguiente figura 12.6.

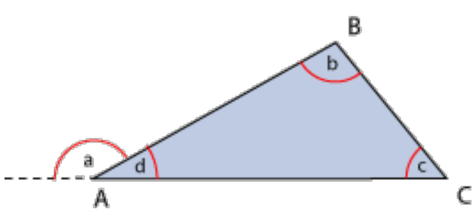


(a) $\measuredangle D + \measuredangle E + \measuredangle F = 360^\circ$

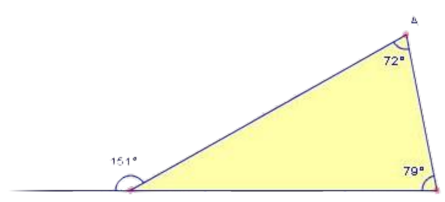


(b) $360^\circ = 118^\circ + 140^\circ + 102^\circ$

Figura 12.5: Propiedades de ángulos exteriores de triángulos.



(a) $\measuredangle a = \measuredangle b + \measuredangle c$



(b) $171^\circ = 72^\circ + 79^\circ$

Figura 12.6: Propiedades de los ángulos de un triángulos.

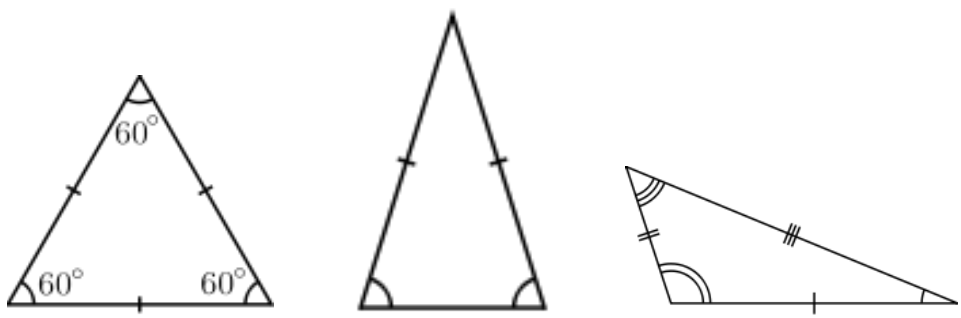
12.2.2 Clasificación de triángulos

Los triángulos se clasifican en base a dos criterios.

Clasificación de triángulos según sus lados

- Un triángulo es *equilátero*, si tiene sus tres lados iguales.
- Un triángulo es *isósceles,* si tiene dos de sus lados iguales.
- Un triángulo es *escaleno*, si tiene sus tres lados desiguales.

Ver figura 12.7



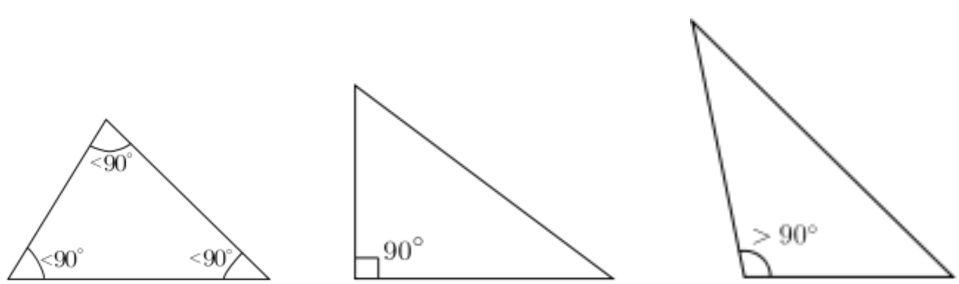
(a) Triángulo equilatero (b) Triángulo isoceles (c) Triángulo escaleno

Figura 12.7: Clasificación de triángulos según sus lados.

Clasificación de triángulos según sus ángulos

- Un triángulo es *acutángulo*, si tiene todos sus ángulos agudos.
- Un triángulo es r*ectángulo*, si tiene uno de sus ángulos recto, vale decir, de 90°.
- Un triángulo es *obtusángulo*, si tiene un ángulo obtuso.

Ver figura 12.8



(a) Triángulo acutángulo (b) Triángulo rectángulo (c) Triángulo obstusángulo

Figura 12.8: Clasificación de triángulos según sus lados.

12.3 Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras establece que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa (el lado de mayor longitud del triángulo rectángulo) es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (los dos lados menores del triángulo, los que conforman el ángulo recto).
Si un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes a, y b, y la medida de la hipotenusa es c, se establece que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

De la ecuación anterior se deducen fácilmente que:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

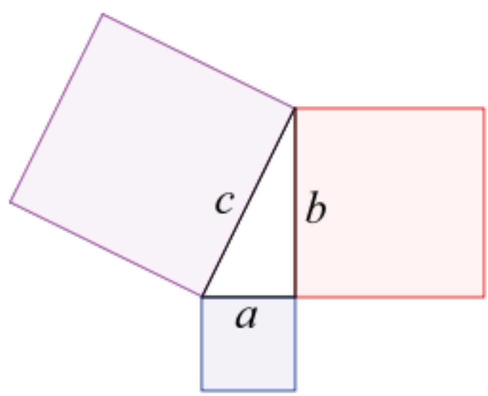


Figura 12.9: *Teorema de Pitágoras*: En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Pitágoras de Samos

Ejemplo 12.1

Hallar el valor de la hipotenusa en el triángulo rectángulo de la figura 12.10

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 5^2 + 12^2 &= c^2 \\ 25 + 144 &= c^2 \\ 169 &= c^2 \\ c &= \sqrt{169} \\ c &= 13 \end{aligned}$$

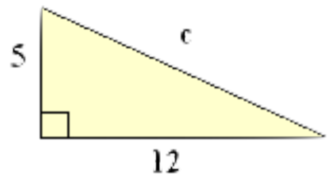


Figura 12.10: Hallar el valor de c

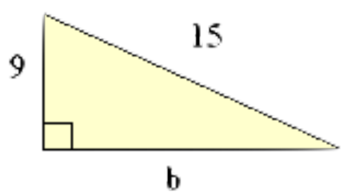


Figura 12.11: Hallar el valor de b

Ejemplo 12.2

Hallar el valor del cateto b en el siguiente triángulo rectángulo (Ver figura 12.11)

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= c^2 \\ 9^2+b^2 &= 15^2 \\ 81+b^2 &= 225 \\ b^2 &= 225-81 \\ b^2 &= 144 \\ b &= \sqrt{144} \\ b &= 12 \end{aligned}$$

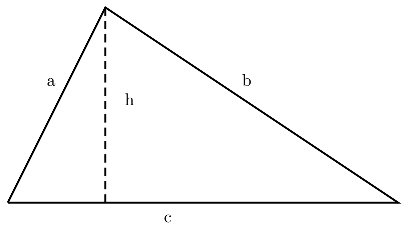


Figura 12.12: Triángulo

12.4 Área y perímetro de Polígonos

Triángulo

- Área triángulo

$$\begin{aligned} A_{Triangulo} &= \frac{bh}{2} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)-2(a^4+b^4+c^4)} \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

  Donde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

- Perímetro triángulo

$$P_{Triangulo} = a+b+c$$

Cuadrado

- Área cuadrado

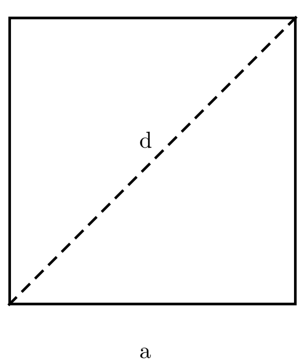


Figura 12.13: Cuadrado

$$\begin{aligned} A_{Cuadrado} &= a^2 \\ &= \frac{d^2}{2} \end{aligned}$$

- Perímetro cuadrado

$$
\begin{aligned}
P_{Cuadrado} &= 4a \\
&= 2\sqrt{2}d
\end{aligned}
$$

Rectángulo

- Área rectángulo

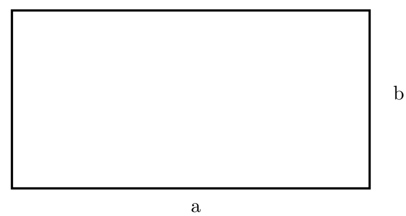


Figura 12.14: Rectángulo

$$
A_{Rectangulo} = ab
$$

- Perímetro rectángulo

$$
P_{Rectangulo} = 2a + 2b
$$

Rombo

- Área del Rombo

$$
\begin{aligned}
A_{Rombo} &= a^2 \\
&= \frac{Dd}{2}
\end{aligned}
$$

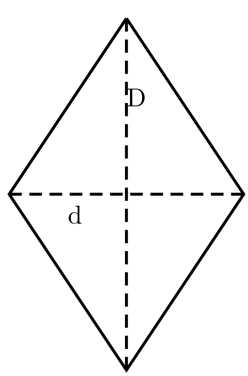


Figura 12.15: Rombo

- Perímetro rombo

$$\begin{aligned} P_{Cuadrado} &= 4a \\ &= 2\sqrt{2}d \end{aligned}$$

Romboide

- Área romboide

$$A_{Romboide} = ah$$

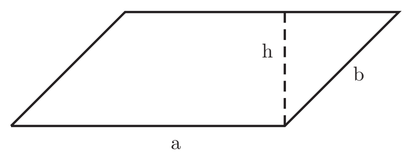


Figura 12.16: Romboide

- Perímetro rombo

$$P_{Romboide} = 2a+2b$$

Trapecio

- Área trapecio

$$A_{trapecio} = \frac{(a+c)h}{2}$$

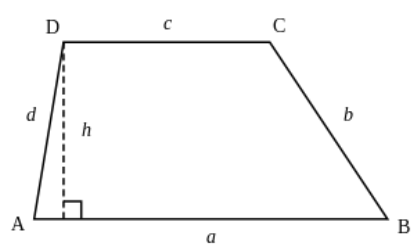


Figura 12.17: Trapecio

Otra formula que podría ser util para el cálculo del área del trapecio es

$$A_{trapecio} = \frac{(a+c)\sqrt{(-a+b+c+d)(-a-b+c+d)(-a-b+c-d)(a-b-c+d)}}{4|a-c|}$$

- Perímetro trapecio

$$P_{trapecio} = a+b+c+d$$

12.4.1 Círculo

- Área circulo

$$
\begin{aligned}
A_{Circulo} &= \pi r^2 \\
&= \frac{\pi D^2}{4}
\end{aligned}
$$

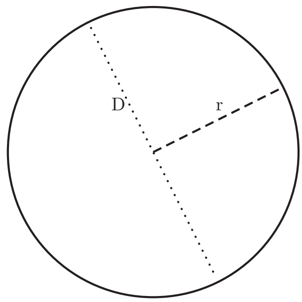


Figura 12.18: Circulo

- Perímetro del circulo

Perímetro

$$
\begin{aligned}
P_{Circulo} &= 2\pi r \\
&= \pi D.
\end{aligned}
$$

12.5 Área y volúmenes de cuerpos sólidos

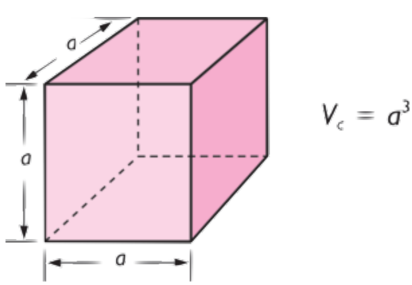


Figura 12.19: Cubo

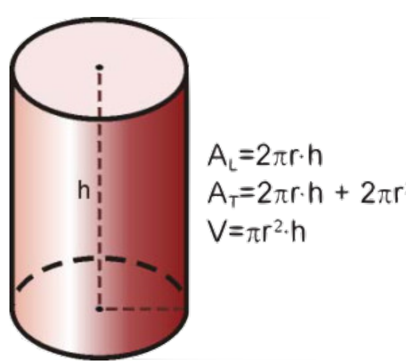


Figura 12.20: Cilindro

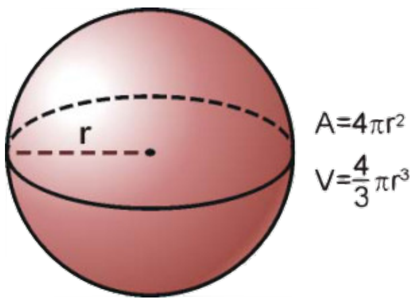


Figura 12.21: Esfera

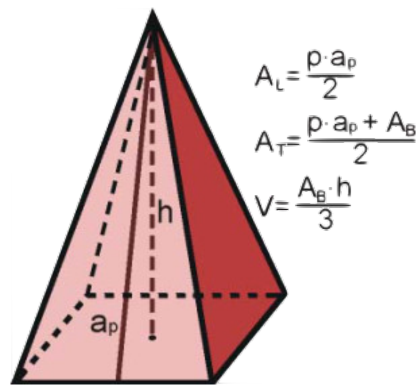


Figura 12.22: Piramide

Ejemplo 12.3

Calcular el volumen del tronco de pirámide de la figura 12.25

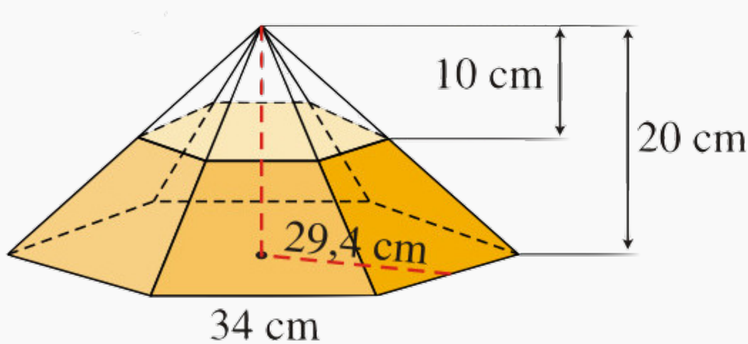


Figura 12.25: Calcular el volumen del tronco de pirámide

Comencemos calculando el área de la base mayor

$$A_{Base} = \frac{(6)(34)(29{,}4)}{2} = 2998{,}2cm^2$$

Calculemos ahora el volumen del tronco de pirámide, para ello calculemos dos volúmenes, el de la pirámide grande y el de la pirámide superior pequeña.

$$
\begin{aligned}
V_{PG} &= \frac{(\text{Área de la base})(Altura)}{3} \\
&= \frac{(2998{,}8)(20)}{3} \\
&= 19992cm^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{PP} &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 V_{PG} \\
&= \frac{1}{8}19992 \\
&= 2499cm^3
\end{aligned}
$$

$$
V_{Tronco} = 19992 - 2499 = 17493cm^3
$$

Ejemplo 12.4

Calcula el volumen del tronco de cono de la figura 12.26

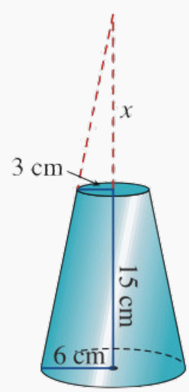


Figura 12.26: Calcular el volumen del tronco de cono

Comencemos calculando el valor de la altura x

$$
\begin{aligned}
\frac{x+15}{6} &= \frac{x}{3} \\
3x+45 &= 6x \\
x &= 15cm
\end{aligned}
$$

Igual que en ejemplo anterior calculemos el volumen del cono grande y del volumen del cono superior pequeño y restemos estos dos valores.

$$\begin{aligned}
V_{CG} &= \frac{(\text{Área de la base})(Altura)}{3} \\
&= \frac{\pi r^2 h}{3} \\
&= \frac{(3{,}14)(6^2)(30)}{3} \\
&= 1130{,}4 cm^3
\end{aligned}$$

$$V_{CP} = \frac{(3{,}14)(3^2)15}{3} = 141,3cm^3$$

$$\begin{aligned}
V_{Tronco} &= V_{CG} - V_{CP} \\
&= 1130{,}4 - 141{,}3 \\
&= 988{,}1 cm^3
\end{aligned}$$

Ejemplo 12.5

Un florero con forma cilíndrica tiene un diámetro interior de 12 cm y su altura es de 25 cm. Queremos llenarlo hasta los 2/3 de su capacidad. ¿ Cuántos litros de agua necesitamos?

$$\begin{aligned}
V_{Cilindro} &= \pi r^2 h \\
&= (3{,}14)(6^2)(25) \\
&= 2826 cm^3 \\
&= 2826 cm^3 \frac{1 litro}{1000 cm^3} \\
&= 2{,}826 litros
\end{aligned}$$

Ahora $\frac{2}{3} 2{,}826 = 1{,}884$ litros

Ejercicios 12.1

1. Calcula el volumen de una pirámide regular cuya base es un hexágono de 20 cm de lado y su arista lateral es de 29 cm.
2. Calcula el volumen de un cono cuya generatriz mide 20 cm y el radio de su base es de 10 cm.
3. Una piscina tiene forma de prisma rectangular de dimensiones $25m \times 15m \times 3m$. ¿ Cuántos litros

de agua son necesarios para llenar los $\frac{4}{5}$ de su volumen?

4. ¿ Puede existir un triangulo rectángulo tal que su hipotenusa mida 73 cm y sus catetos 48 y 55 cm?. (Justifique su respuesta)
5. ¿ Puede existir un triangulo tal que sus lados midan 24 cm y sus catetos 15 y 12 cm?. (Justifique su respuesta)
6. Calcular el lado de un triángulo equilaátero de altura 28 cm
7. En los lados de un campo en forma de cuadrado se han plantado 16 árboles, separados 5 m entre sí. ¿ Cuál es el área del terreno?
8. Se desea pintar las paredes y el techo de un salón de 12×7 de planta y altura $3,5$ m. Sabiendo que dispone de dos puertas de 1×2 m, y tres ventanales de 2×2 m, ¿ cuánta superficie habrá que pintar?. Si disponemos de botes de pintura para 25 m^2, ¿ cuántos botes necesitaremos?
9. A un paciente se le aplica un suero intravenoso tal que cae una gota cada minuto. Si suponemos que el recipiente es un cilindro de 4 cm de radio y 14 de altura, y la gota es aproximadamente una esfera de 1 mm de diámetro, hallar cuánto durará el suero.
10. Al aumentar en 1 cm la arista de un cubo su volumen aumenta en 271 cm^3. ¿ Cuánto mide la arista?
11. El suelo de un depósito cilíndrico tiene una superficie de 45 m^2. El agua que contiene alcanza $2,5$ metros. Para vaciarlo se utiliza una bomba que extrae 80 $litos/min$. ¿ Cuánto tiempo tardará en vaciarse?
12. En un almacén de dimensiones 5 m de largo, 3 m de ancho y 2 m de alto queremos almacenar cajas de dimensiones 1 m de largo, 60 cm de ancho y 40 cm de alto. ¿ Cuantas cajas podremos almacenar?
13. Calcular el volumen del prisma de la figura 12.27 cuyas bases son triángulos equiláteros

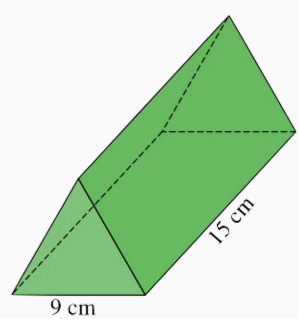


Figura 12.27: Calcular el volumen del prisma

14. Calcular el volumen de los siguientes cuerpos:

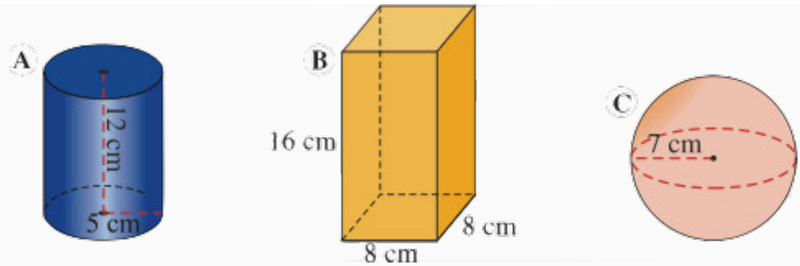


Figura 12.28: Calcular el volumen de los siguientes cuerpos

15. Calcular el volumen de este prisma de base hexagonal regular

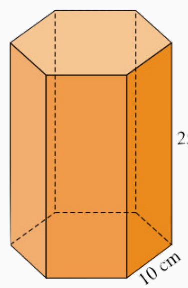


Figura 12.29: prisma de base hexagonal regular

16. Calcular el volumen de una pirámide regular cuya base es un cuadrado de 24 cm de lado y su arista lateral es de 37 cm

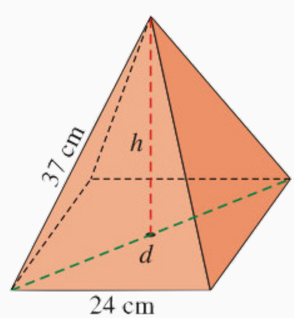


Figura 12.30: Pirámide regular

17. Calcular el volumen de un cono cuya generatriz mide 25 cm y el radio de su base es de 12 cm.

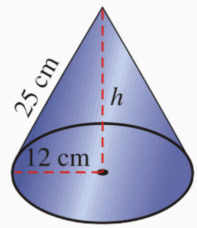


Figura 12.31: Cono

18. Calcular el volumen de los siguientes sólidos.

    a) .

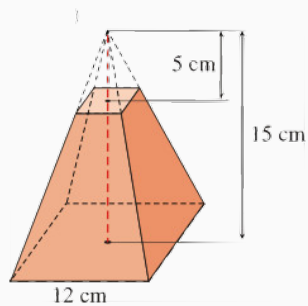


Figura 12.32: Pirámide

b) .

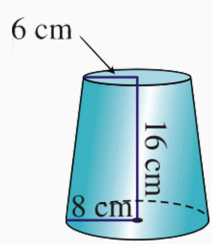


Figura 12.33: Cono truncado

c) .

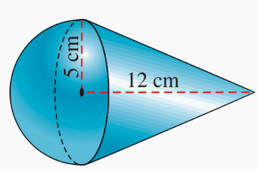


Figura 12.34: Semiesfera y cono

19. Calcular el valor de la longitud w de la figura 12.35

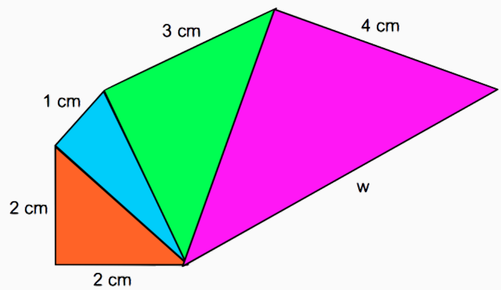


Figura 12.35: Calcular w

20. Calcular las áreas de las siguientes figuras (Ver figura 12.36)

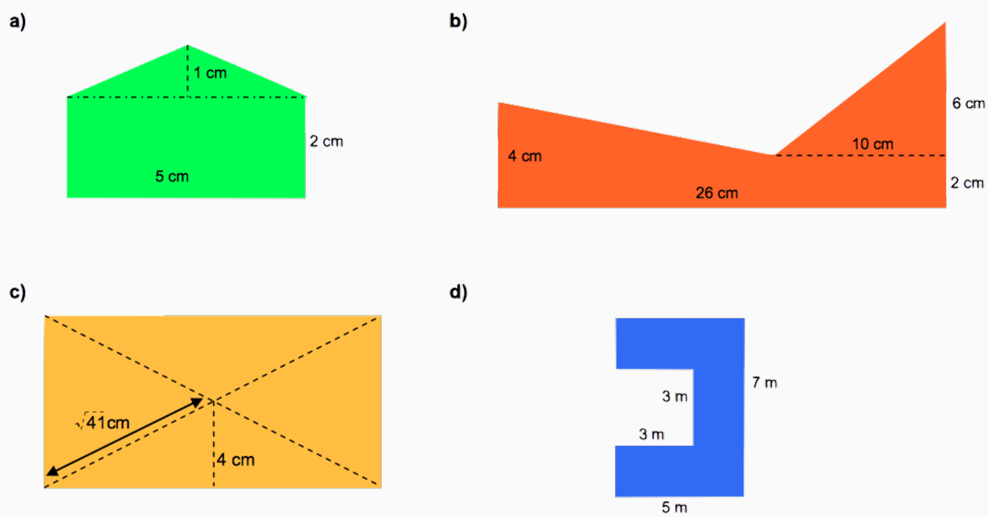


Figura 12.36: Calcular las áreas

21. Arquimedes fue un gran inventor y físico y matemático, nació en Siracusa (Grecia) en el año 285 A.C. El cálculo del volumen de la esfera fue uno de los descubrimientos que Arquimedes más valoraba de todos los que hizo en su vida. Demostró de una forma muy original que el volumen de una esfera es igual a dos tercios del volumen del cilindro circular circunscrito a ella $\left(V_{Esfera} = \frac{2}{3}V_{Cilindro}\right)$, y pidió que en su tumba se tallara una figura como la que se muestra en la figura 12.37

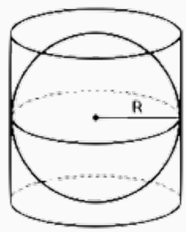


Figura 12.37: $R = \frac{a}{2}$

Si el volumen del cilindro circunscrito es 36π calcular el volumen de la esfera, la diferencia entre el volumen del cilindro y el volumen de la esfera.

22. En una probeta de 6 cm de radio se echan cuatro cubitos de hielo de 4 cm de arista. ¿ A qué altura llegará el agua cuando se derritan?
23. La cúpula de una catedral tiene forma semiesférica, de diámetro 50 m. Si restaurarla tiene un coste de $300 el m^2, ¿ A cuánto ascenderá el presupuesto de la restauración?
24. Obtener el área de un hexágono regular circunscrito (ver figura 12.38) en una circunferencia de radio 2 m.

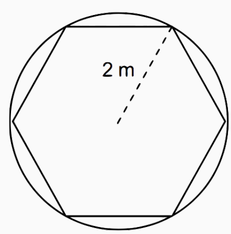


Figura 12.38: Hallar el área del hexágono

25. ¿ Es el triangulo *ABC* de la figura 12.39 un triángulo rectángulo?

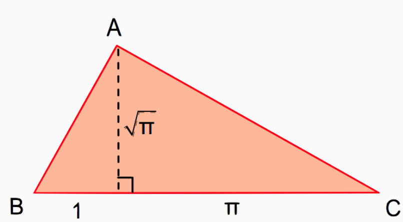


Figura 12.39: ¿ *ABC* es rectángulo?

26. Calcular el área de un hexágono regular de 3 cm de apotema. Dejar el resultado en forma de raíz.
27. Calcular el área de un hexágono regular de 24 cm de perímetro

28. Hallar el área de una señal de tráfico, si su altura es 90 cm y su lado mide 37 cm.

Figura 12.40: La señal de detención obligatoria (señal de **alto**, señal de **pare** o **stop**) es una señal de tráfico reglamentaria que indica en las intersecciones la obligación de detenerse antes de continuar la marcha. En su forma más extendida alrededor del mundo, es presentada como un octágono de fondo rojo con un semiborde blanco

29. Calcular la superficie de la siguiente pieza

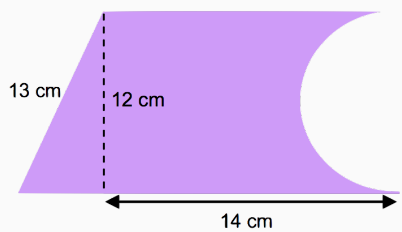


Figura 12.41: Calcular área

30. Dibujar un sector circular de amplitud 30 asociado a una circunferencia de 12 m de radio. Calcular su área y su perímetro.
31. Calcular el área de la circunferencia circunscrita a un rectángulo de lados 15 y 20 cm circunscrito

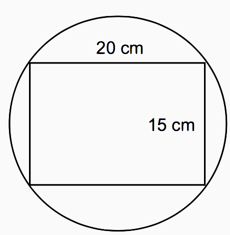


Figura 12.42: Circunferencia circunscrita en un rectángulo, Rectángulo inscrito en una circunferencia

32. Calcular el área de los siguientes trapecios isósceles:

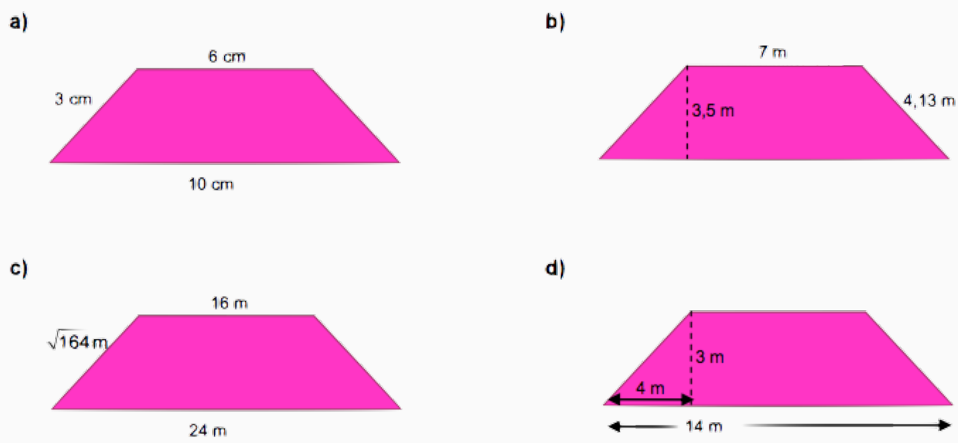


Figura 12.43: Calcular las áreas

33. Se desea embaldosar el suelo de una oficina, cuya planta es la de la figura 12.44. Si la baldosa cuesta 200,000 $pesos/m^2$, ¿ cuánto costará en total?

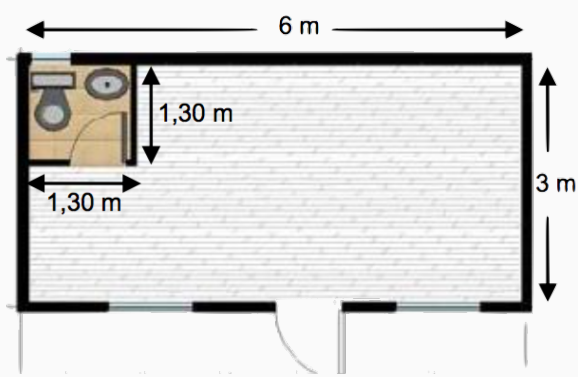


Figura 12.44: Planta de la oficina

34. Los griegos conocían las dos siguientes posibles formas de construir un triángulo rectángulo con sus tres lados de longitud entera, sin más que dar valores a $n \in \mathbb{N}$. Comprobar la veracidad de dichas fórmulas generando algunos casos concretos. Podría dar u na demostración a este hecho.

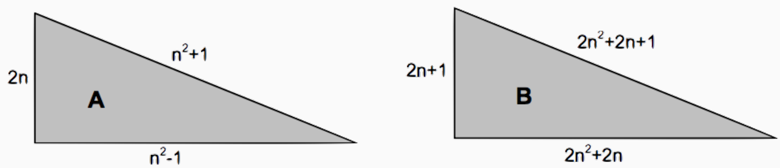


Figura 12.45: Triángulos rectángulos de lados enteros

35. Calcular el volumen comprendido entre el cubo y el cono de la figura 12.46

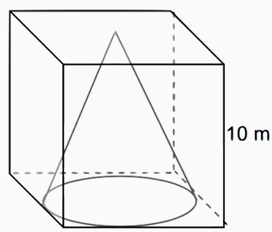
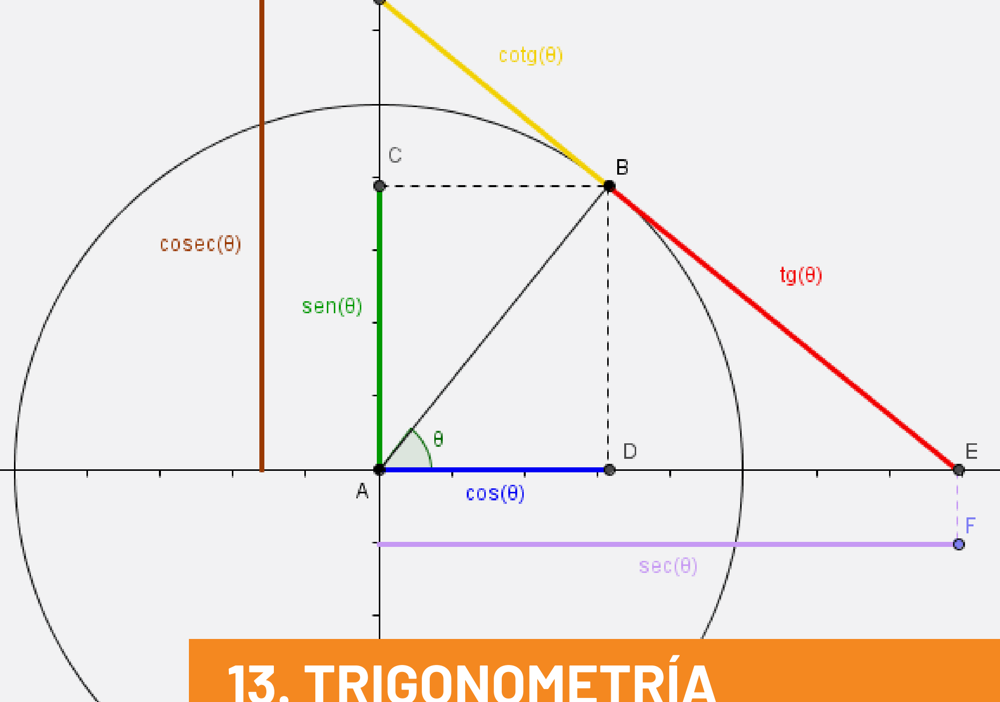


Figura 12.46: Cono inscrito en un cubo



13. TRIGONOMETRÍA

13.1 Trigonometría

La trigonometría es la parte de la matemática que estudia la relación entre los lados de un triángulo rectángulo y sus ángulos. Actualmente, esta idea básica ha sido superada y las funciones trigonométricas tienen, matemáticamente hablando, sentido propio.

La trigonradianometría es una disciplina fundamental, tanto para el estudio geométrico, como para el conocimiento del calculo y el análisis matemático.

Este estudio da pie a considerar una serie de funciones (seno, coseno, tangente...) que dan lugar a un campo mucho más amplio que el considerado inicialmente y que se aplica sobre todo a fenómenos de tipo periódico, como son las ondas electromagnéticas. En la antigüedad, se uso para los estudios astronómicos y en agrimensura. Hoy en día, además, la trigonometría juega un papel clave en los sistemas de posicionamiento global (GPS)

13.1.1 Ángulos. Medida de ángulos

En geometría se define un *ángulo* como la unión de dos semi-rectas con origen común. En Trigonometría se interpreta como una rotación de *rayos*. Si se toman dos rayos coincidentes, uno permanece fijo y el otro gira alrededor del punto que se considera el *vértice*. El rayo que permanece fijo recibe el nombre de lado inicial y el que rota el lado final. Se trabaja con ángulos generalizados, esto quiere decir que el rayo que gira lo puede hacer cualquier número de veces y en cualquier dirección. Si el rayo pasa más de una vez por su posición original, suele decirse que es de más de una vuelta. Si gira en sentido contrario de las manecillas del reloj, se dice que está *orientado positivamente*, si lo hace en el mismo sentido de las manecillas del reloj está *orientado negativamente*.

En muchas ocasiones es necesario utilizar ángulos en *posición normal* o *canónica*. Un ángulo en posición normal es aquel que tiene su vértice en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas, el lado inicial coincide con el eje x positivo y el lado final está contenido en uno de los cuatro cuadrantes determinados por el sistema cartesiano, o está sobre uno de los ejes,en cuyo caso es un

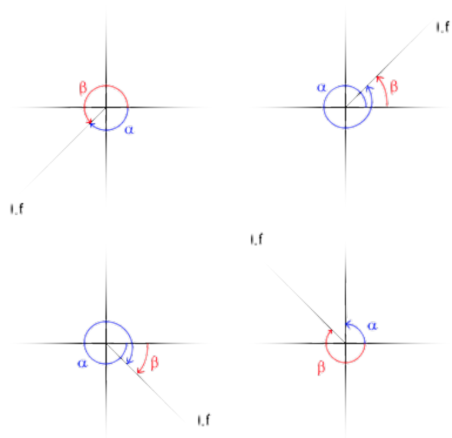


Figura 13.1: ángulos en posición normal o canónica

ángulo cuadrantal.
Como el número de giros del lado final así como su sentido no tienen restricción, los lados inicial y final de dos ángulos diferentes pueden coincidir.(ver la figura 13.1)

La *medida de un ángulo* estaá determinada por la cantidad de rotacioón desde el lado inicial hasta el lado terminal. Una forma de medir ángulos es en radianes). Este tipo de medida es especialmente útil en cálculo. Para definir un *radián* se puede usar un ángulo central de una circunferencia, cuyo vértice es el centro de la circunferencia, como se muestra en la Figura 13.2

Definición 13.1 Radián

Un radián es la medida de un ángulo cuyo vértice está en el centro de una circunferencia y que barre un arco cuya longitud es igual a la del radio.
Si θ es un ángulo con vértice en el centro de un círculo de radio r, su medida en radianes es: $\frac{s}{r}$, donde s es la longitud del arco subtendido por θ. Esto es

$$\theta = \frac{s}{r}$$

ver figura 13.2

Una revolución alrededor de una circunferencia de radio r corresponde a un aángulo de 2π radianes porque

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi \cancel{r}}{\cancel{r}} = 2\pi$$

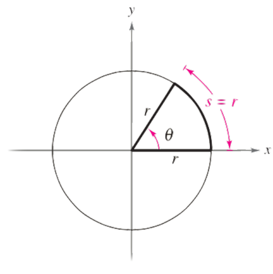


Figura 13.2: $s = r\theta$

En vista que la medida en radianes de un ángulo de una revolución completa es 2π, se puede obtener lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\text{ revolución } &= \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ radianes}\\
\frac{1}{4}\text{ revolución } &= \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{4}} = \frac{\pi}{2} \text{ radianes}\\
\frac{1}{6}\text{ revolución } &= \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{6}} = \frac{\pi}{3} \text{ radianes}
\end{aligned}$$

Éstos y otros ángulos comunes se ilustran en la figura 13.3

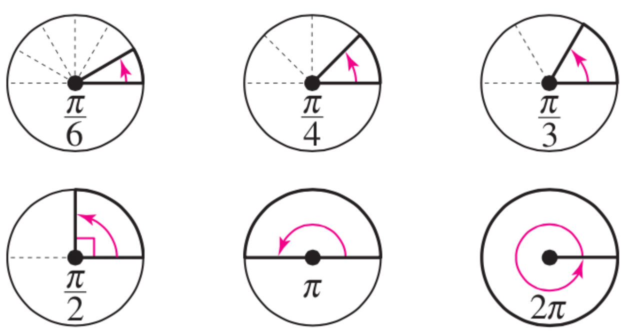


Figura 13.3: Ángulos expresado en radianes

Los cuatro cuadrantes en un sistema de coordenadas están numerados como I, II, III y IV. La figura 13.4 muestra cuáles ángulos entre 0 y 2π están en cada uno de los cuatro cuadrantes.

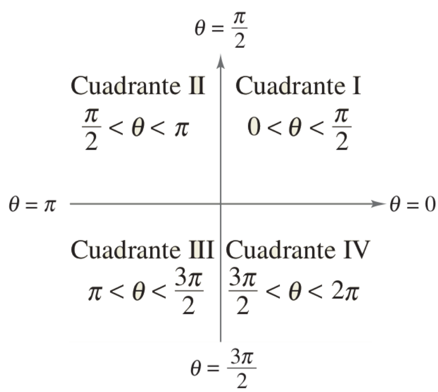


Figura 13.4: los ángulos con lado terminal entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ son **agudos** y los ángulos con lado terminal entre $\frac{\pi}{2}$ y π son ángulos **obtusos**

Definición 13.2 Ángulos coterminales

Dos ángulos son coterminales si tienen los mismos lados inicial y terminal. Por ejemplo, los ángulos 0 y 2π son coterminales, igual que los ángulos $\pi/6$ y $13\pi/6$. Se puede encontrar un ángulo que sea coterminal a un ángulo θ determinado si se suma o resta 2π (una revolución)

Definición 13.3 Ángulos complementarios y suplementarios

Dos ángulos positivos α y β son complementarios (complemento uno del otro) si su suma es $\pi/2$. Dos ángulos positivos son suplementarios (suplemento uno del otro) si su suma es π. Ver figura 13.5

Figura 13.5: ángulos complementarios y suplementarios

Ejemplo 13.1

Encuentre el complemento y el suplemento de $2\pi/5$ y $4\pi/5$

El complemento de $\dfrac{2}{5}\pi$ es

$$\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}=\frac{5\pi}{10}-\frac{4\pi}{10}=\frac{\pi}{10}$$

El suplemento de $2\pi/5$ es

$$\pi-\frac{2\pi}{5}=\frac{5\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}=\frac{3\pi}{5}$$

Como $4\pi/5$ es mayor que $\pi/2$, no tiene complemento. El suplemento es

$$\pi-\frac{4\pi}{5}=\frac{5\pi}{5}-\frac{4\pi}{5}=\frac{\pi}{5}$$

Definición 13.4 Grado Sexagesimal

Un grado sexagesimal es el ángulo central subtendido por un arco cuya longitud es igual a $\frac{1}{360}$ de la circunferencia. Es la nonagésima $\frac{1}{90}$ parte de un ángulo recto.

Para medir ángulos es conveniente marcar grados en la circunferencia de un círculo, como se ve en la figura 13.6 Entonces, una revolución completa (en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj, levógiro) corresponde a $360°$, la mitad de una revolución a $180°$, un cuarto de revolución a $90°$.
2π radianes corresponden a una revolución completa, entonces

$$360° = 2\pi \quad rad \text{ y } 180° = \pi \quad rad$$

luego

$$1° = \frac{\pi}{180} \quad rad \text{ y } 1 \quad rad = \left(\frac{180°}{\pi}\right)$$

N [Conversión entre grados y radianes].

- Para convertir grados a radianes multiplicamos grados por $\dfrac{\pi rad}{180°}$
- Para convertir radianes a grados multiplicamos radianes por $\dfrac{180°}{\pi rad}$

Ver figura 13.7

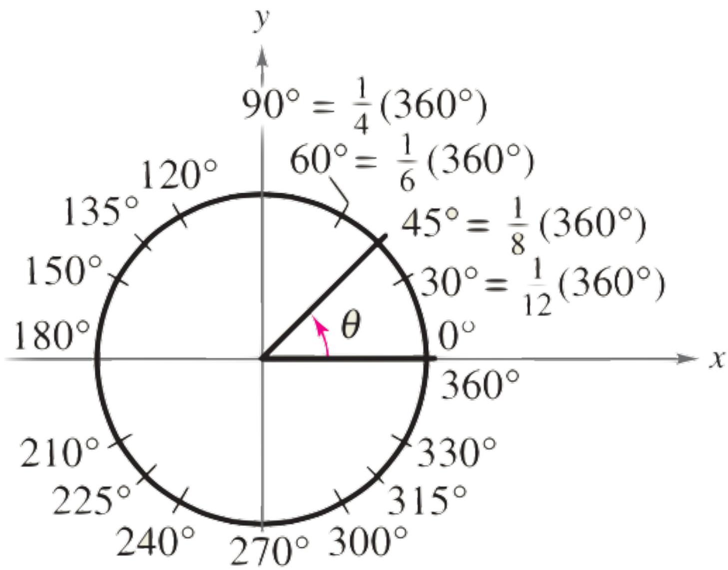


Figura 13.6: medidas de ángulos en grados sexagesimales

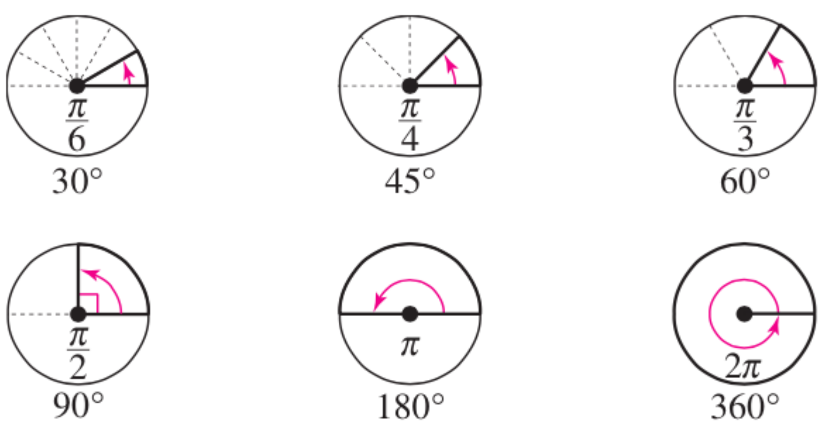


Figura 13.7: Para aplicar estas dos reglas de conversión, use la relación básica $\pi rad = 180°$.

Ejemplo 13.2

- $135^\circ = 135\cancel{^\circ}\dfrac{\pi rad}{180\cancel{^\circ}} = \dfrac{3\pi}{4} rad$
- $540^\circ = 135\cancel{^\circ}\dfrac{\pi rad}{180\cancel{^\circ}} = 3\pi rad$
- $\dfrac{\pi}{2} rad = \left(\dfrac{\cancel{\pi rad}}{2}\right)\left(\dfrac{180^\circ}{\cancel{\pi rad}}\right) = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$
- $\dfrac{9\pi}{2} rad = \left(\dfrac{9\cancel{\pi rad}}{2}\right)\left(\dfrac{180^\circ}{\cancel{\pi rad}}\right) = \dfrac{(9)(180^\circ)}{2} = \dfrac{1620^\circ}{2} = 810^\circ$
- $2rad = 2\ \cancel{rad}\left(\dfrac{180^\circ}{\pi\cancel{rad}}\right) = \dfrac{(2)(180^\circ)}{\pi} = \dfrac{360^\circ}{\pi} = 114{,}59^\circ$

13.1.2 Circunferencia unitaria

Definición 13.5 Circunferencia Unitaria

La circunferencia goniométrica, trigonométrica, unitaria o círculo unidad es una circunferencia de radio uno, normalmente con su centro en el origen $(0,0)$ de un sistema de coordenadas, de un plano euclídeo. Si (x,y) es un punto de la circunferencia unidad del primer cuadrante, entonces x e y son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene longitud 1. Aplicando el teorema de Pitágoras, x e y satisfacen la ecuación:

$$x^2 + y^2 = 1$$

ver figura 13.8

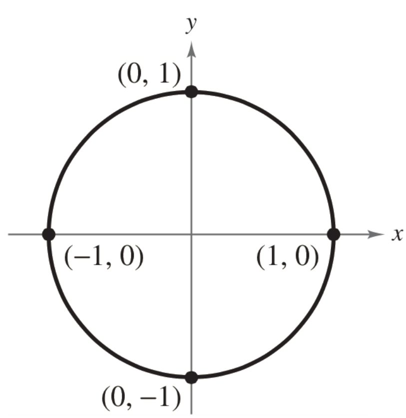


Figura 13.8: Circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$

13.1.3 Funciones trigonométricas en la circunferencia unidad

Definición 13.6 Razones Trigonométricas

Si (x,y) es un punto de la circunferencia unidad, y el radio que tiene el origen en $(0,0)$, forma un ángulo α con el eje x, las funciones trigonométricas se pueden representar como razón de segmentos asociados a triángulos rectángulos auxiliares, de la siguiente manera (ver figura 13.9):

- El **seno** es la razón entre el cateto opuesto a y la hipotenusa c

  $$sen(\alpha) = \frac{a}{c}$$

  y dado que la hipotenusa es igual al radio, que tiene valor de 1, se deduce:

  $$sen(\alpha) = a$$

- El **coseno** es la razón entre el cateto adyacente b y la hipotenusa c

  $$cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

  y como hipotenusa = 1, se deduce:

  $$cos(\alpha) = b$$

- La **tangente** es la razón entre el cateto opuesto a y el adyacente b.

  $$tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$

- la **cotangente** es la razón entre el cateto adyacente b y el opuesto a

  $$cot(\alpha) = \frac{b}{a}$$

  De aquí vemos que **la cotangente es la reciproca de la tangente** es decir $cot(\alpha) = \frac{1}{tan(\alpha)}$ o equivalentemente $tan(\alpha) = \frac{1}{cot(\alpha)}$
- El **secante** es la razón entre la hipotenusa c y en cateto adyacente b

  $$sec(\alpha) = \frac{c}{b}$$

  y como hipotenusa = 1, se deduce:

  $$sec(\alpha) = \frac{1}{b}$$

  Es decir **la secante es la reciproca del coseno** esto es $sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)}$ o equivalentemente $cos(\alpha) = \frac{1}{sec(\alpha)}$

- El **cosecante** es la razón entre la hipotenusa c y en cateto opuesto a

$$csc(\alpha) = \frac{c}{a}$$

y como hipotenusa = 1, se deduce:

$$csc(\alpha) = \frac{1}{a}$$

Es decir **la cosecante es la reciproca del seno** esto es $csc(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)}$ o equivalentemente $sen(\alpha) = \frac{1}{csc(\alpha)}$

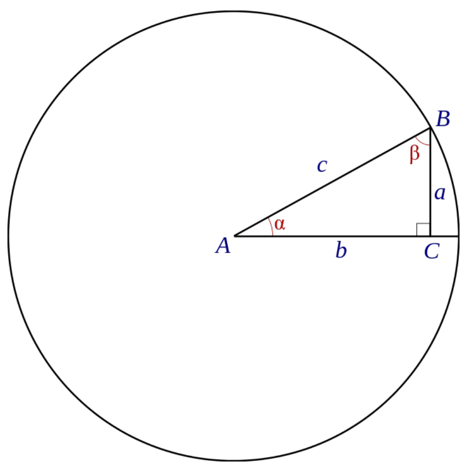


Figura 13.9: La circunferencia unidad y el triángulo rectángulo asociado.

En las definiciones de las funciones trigonométricas, observe que la tangente y secante no están definidas cuando $x = 0$. Por ejemplo, como $t = \pi/2$ corresponde a $(x,y) = (0,1)$, se deduce que $tan(\pi/2)$ y $sec(\pi/2)$ no están definidas. Del mismo modo, la cotangente y cosecante no están definidas cuando $y = 0$. Por ejemplo, como $t = 0$ corresponde a $(x,y) = (1,0)$, $cot(0)$ y $csc(0)$ no están definidas.

Definición 13.7 Función Periódica

Una función f es periódica si existe un número real positivo c tal que

$$f(t+c) = f(t)$$

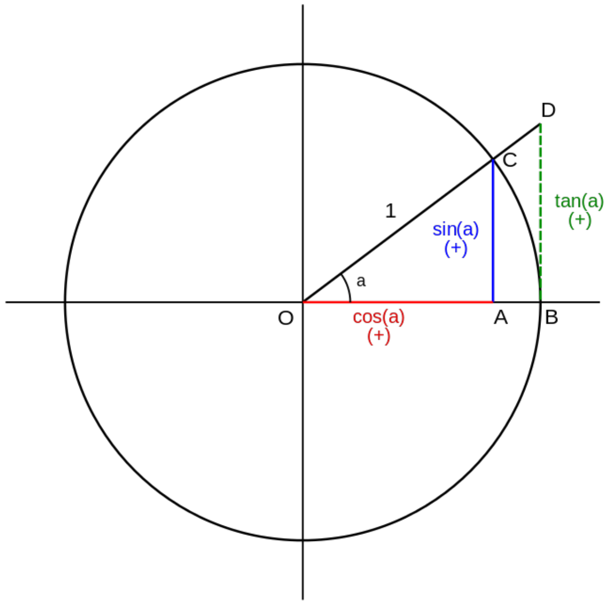


Figura 13.10: Representación en un círculo unitario el seno, coseno y la tangente de un ángulo.

> para toda t en el dominio de f. El número más pequeño c para el cual f es periódica se denomina periodo de f.

13.1.4 Gráficas de las funciones trigonométricas

Seno

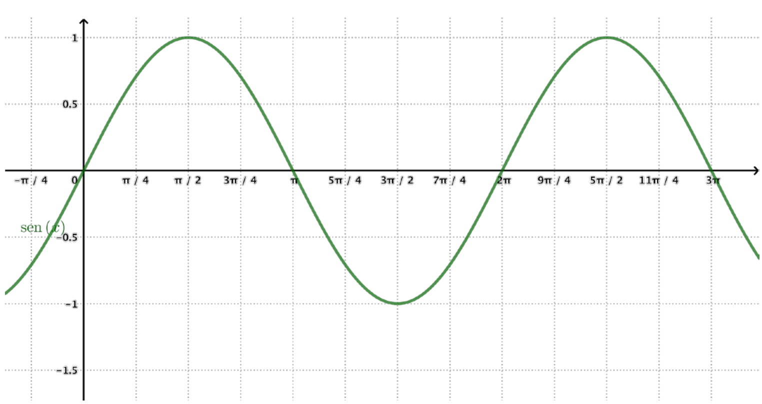


Figura 13.11: Función $sen(\alpha)$

- Dominio $\mathbb{R}$
- Recorrido $[-1,1]$
- Periodo $2\pi rad$

Coseno

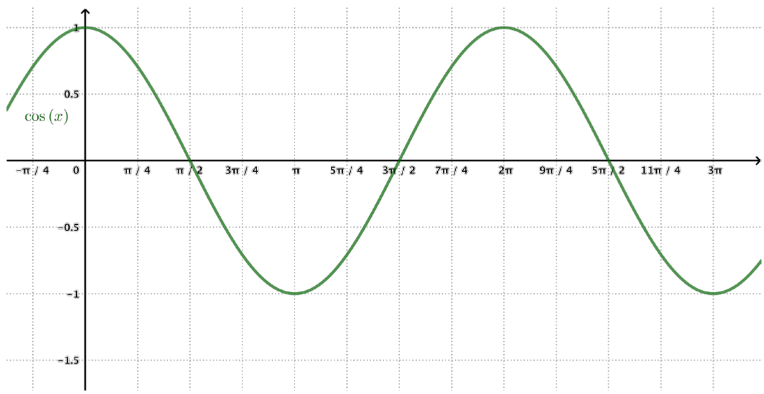


Figura 13.12: Función $cos(\alpha)$

- Dominio $\mathbb{R}$
- Recorrido $[-1,1]$
- Periodo $2\pi rad$

Tangente

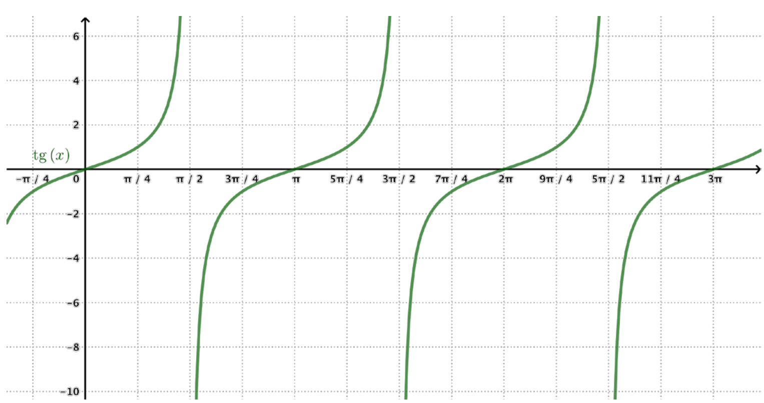


Figura 13.13: Función $tan(\alpha)$

- Dominio $\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$
- Recorrido $\mathbb{R}$
- Periodo πrad

Cotangente

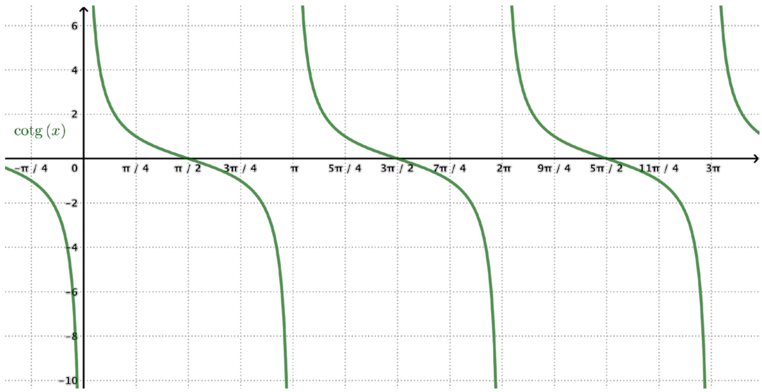


Figura 13.14: Función $cot(\alpha)$

- Dominio $\mathbb{R} - \{k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$
- Recorrido $\mathbb{R}$
- Periodo πrad

Secante

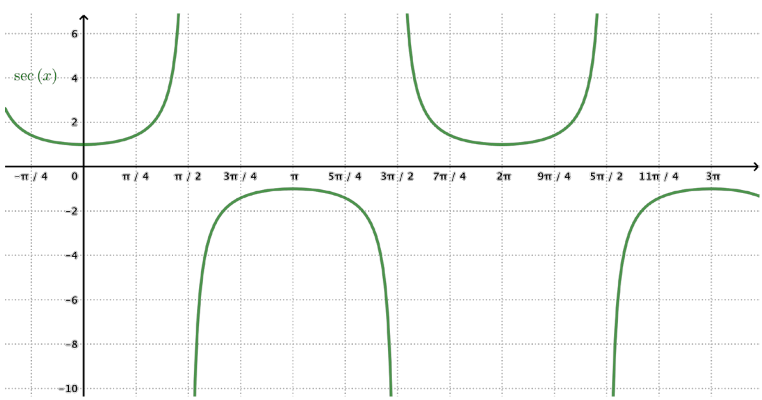


Figura 13.15: Función $sec(\alpha)$

- Dominio $\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$

- Recorrido $(-\infty] - 1 \cup [1, \infty)$
- Periodo $2\pi rad$

Cosecante

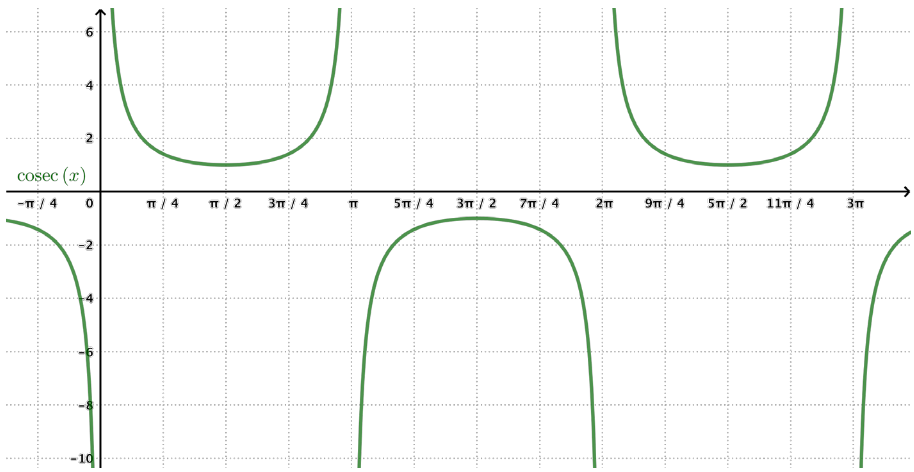


Figura 13.16: Función $csc(\alpha)$

- Dominio $\mathbb{R} - \{k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$
- Recorrido $(-\infty] - 1 \cup [1, \infty)$
- Periodo $2\pi rad$

13.1.5 Trigonometría del Triángulo rectángulo

Las perspectivas históricas de la trigonometría incorporan métodos para introducir funciones trigonométricas. La primera introducción de estas funciones está basada en la circunferencia unitaria y la otra desde la perspectiva de un triángulo rectángulo.

Ejemplo 13.3 Funciones trigonométricas de un ángulo

Hallar los valores de las funciones trigonométricas para el ángulo θ del triángulo de la figura 13.18

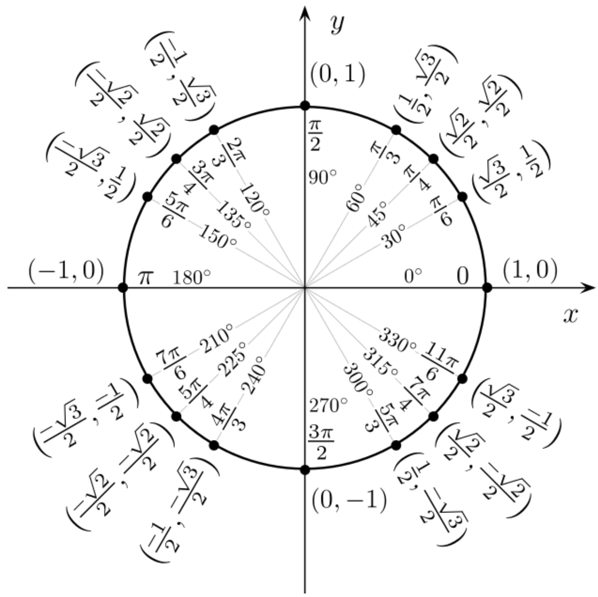


Figura 13.17: Valores de los ángulos más comunes y las coordenadas correspondientes sobre la circunferencia unitaria

Por el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}
(hip)^2 &= (op)^2 + (ady)^2 \\
&= \sqrt{4^2+3^2} \\
&= \sqrt{16+9} \\
&= \sqrt{25} \\
&= 5
\end{aligned}$$

luego tenemos que

$$\begin{aligned}
sen(\theta) &= \frac{op}{hip} = \frac{4}{5} & \qquad csc(\theta) &= \frac{hip}{op} = \frac{5}{4} \\
cos(\theta) &= \frac{ady}{hip} = \frac{3}{5} & \qquad sec(\theta) &= \frac{hip}{ady} = \frac{5}{3} \\
tan(\theta) &= \frac{op}{ady} = \frac{4}{3} & \qquad cot(\theta) &= \frac{ady}{op} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

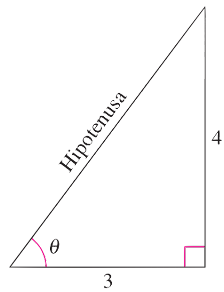


Figura 13.18: Triángulo rectángulo

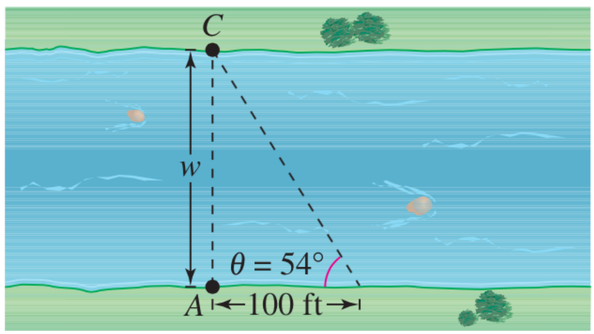


Figura 13.19: Ancho de río

Ejemplo 13.4 Ancho de un río

Un biólogo desea saber el ancho w de un río de modo que se puedan instalar debidamente los instrumentos para estudiar los contaminantes del agua. Desde el punto A, el biólogo camina 100 pies aguas abajo y observa el punto C (ver la figura 13.19). Desde este punto de vista, se determina que $\theta = 54°$. ¿Cuál es el ancho del río?
De la figura podemos calcular que

$$\begin{aligned} tan(54°) &= \frac{w}{100} \\ w &= 100tan(54°) \\ &= 100 * 1{,}376 \\ &= 137{,}6 \end{aligned}$$

El ancho del río es 137,6 ft

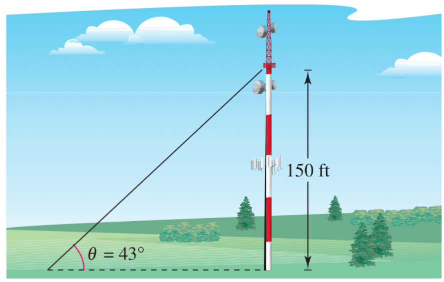


Figura 13.20

Ejemplo 13.5 Longitud

Un cable de sujeción va del suelo a una torre para antenas. El cable está unido a la torre a 150 pies del suelo. El ángulo formado entre el cable y el suelo es de 43° (ver figura 13.20). ¿Cuál es la longitud del cable?; ¿A qué distancia de la base de la torre está anclado el cable al suelo?
De la figura 13.20 vemos que el cable de sujeción, seria la hipotenusa del triángulo rectángulo; luego.

$$\begin{aligned} sen(43^\circ) &= \frac{150}{h} \\ h &= \frac{150}{sen(43^\circ)} \\ &= \frac{150}{0,681} \\ &= 220{,}2 \end{aligned}$$

La longitud del cable es de aproximadamente $241,9\ ft$ La distancia a la base de la torre seria el cateto adyacente al ángulo de 43°, entonces

$$\begin{aligned} tan(43^\circ) &= \frac{150}{ady} \\ ady &= \frac{150}{tan(43^\circ)} \\ &= \frac{150}{0,931} \\ &= 161{,}1 \end{aligned}$$

La distancia de la base de la torre a la que esta anclado el cable del suelo es 161,1

Ejemplo 13.6 Altura de una montaña

Viajando por un terreno plano, usted observa una montaña directamente al frente. Su ángulo de elevación (a la cima) es de 3,5°. Después de acercarse en el auto 13 millas a la montaña, el ángulo de elevación es de 9°. Aproxime la altura de la montaña. ver figura 20b
del triángulo ACD de la figura 20b tenemos que $\overline{AB} = 13$ y

$$tan(35^\circ) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}+\overline{BC}}$$

despejando $\overline{CD}$

$$\overline{CD} = (\overline{AB}+\overline{BC})tan35^\circ \tag{13.1}$$

del triángulo BCD tenemos que

$$tan(9^\circ) = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$$

de donde

$$\overline{BC} = \frac{\overline{CD}}{tan(9^\circ)} \tag{13.2}$$

Remplazando la ecuación 13.2 en la ecuación 13.1 obtenemos

$$\begin{aligned}
\overline{CD} &= \left(\overline{AB} + \frac{\overline{CD}}{tan(9^\circ)}\right) tan(3{,}5^\circ) \\
\overline{CD} &= \overline{AB}tan(3{,}5^\circ) + \overline{CD}\frac{tan(3{,}5^\circ)}{tan(9^\circ)} \\
\overline{CD} - \overline{CD}\frac{tan(3{,}5^\circ)}{tan(9^\circ)} &= \overline{AB}tan(3{,}5^\circ) \\
\overline{CD}\left(1 - \frac{tan(3{,}5^\circ)}{tan(9^\circ)}\right) &= \overline{AB}tan(3{,}5^\circ) \\
\overline{CD} &= \frac{\overline{AB}tan(3{,}5^\circ)}{1 - \frac{tan(3{,}5^\circ)}{tan(9^\circ)}}
\end{aligned}$$

Sustituyendo valores

$$\begin{aligned}
\overline{CD} &= \frac{13(0{,}061)}{1 - \frac{0,061}{0{,}158}} \\
&= \frac{0{,}793}{1 - 0{,}386} \\
&= \frac{0,793}{0{,}614} \\
&= 1{,}2
\end{aligned}$$

La altura de la montaña es de aproximadamente 1,2 millas

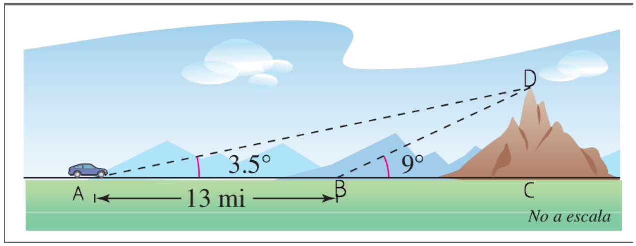


Figura 13.21

Ejemplo 13.7 Altura máxima

Un reglamento de seguridad expresa que el máximo ángulo de elevación para una escalera de rescate es 72°. La escalera más larga de un departamento de bomberos es 110 pies. ¿Cuál es la altura máxima segura de un rescate?
De la figura 13.22 tenemos que

$$
\begin{aligned}
sen(A) &= \frac{a}{c} \\
a &= csen(A) \\
&= 110sen(72^\circ) \\
&= 110(0,95) \\
&= 104,6
\end{aligned}
$$

La máxima altura segura de rescate es de unos 104,6 pies sobre la altura del camión de bomberos

Ejemplo 13.8 Altura de Chimenea

En un punto a 200 pies de la base de un edificio, el ángulo de elevación a la parte más baja de una chimenea es de 35°, mientras que el ángulo de elevación a la parte más alta es de 53°, como se muestra en la figura 13.23. Encuentre la altura s de la chimenea sola.
De la figura 13.23 tenemos que

$$
\begin{aligned}
tan(35^\circ) &= \frac{a}{200} \\
a &= 200tan(35^\circ)
\end{aligned}
$$

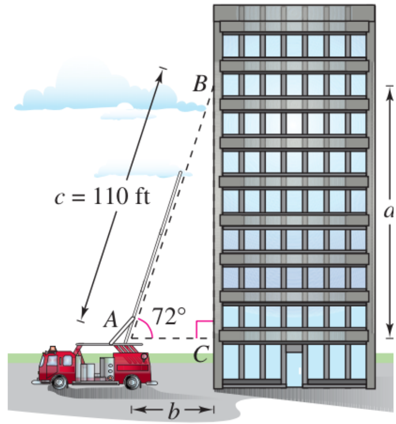


Figura 13.22: Hallar el valor de a

Para el triángulo rectángulo más grande

$$tan(53^\circ) = \frac{a+s}{200}$$

$$\begin{aligned} a+s &= 200tan(53^\circ) \\ s &= 200tan(53^\circ) - a \\ &= 200tan(53^\circ) - 200tan(35^\circ) \\ &= 200(1,32) - 200(0,70) \\ &= 264 - 140 \\ &= 124 \end{aligned}$$

[H]

Ejemplo 13.9 Ángulo de un triángulo

Una piscina mide 20 metros de largo y 12 metros de ancho. El fondo está inclinado de modo que la profundidad del agua es 1,3 metros en el extremo bajo y 4 metros en el extremo profundo, como se ve en la figura 13.24. Encuentre el ángulo de depresión del fondo de la piscina.

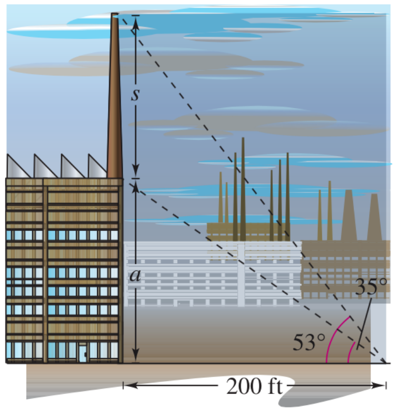


Figura 13.23: Hallar el valor de s

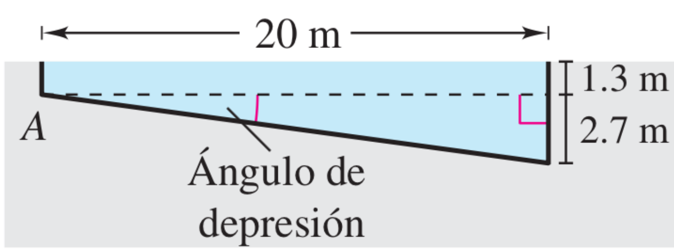


Figura 13.24

$$\begin{aligned}
tan(A) &= \frac{op}{ady} \\
&= \frac{2,7}{20} \\
0,135 & \\
A &= arctan(0,135) \\
&= 0,13419 rad \\
&= 7,69^{\circ}
\end{aligned}$$

[H]

Identidades trigonométricas fundamentales

Identidades reciprocas Estas ya fueron estudiadas

$$sen(\theta) = \frac{1}{csc(\theta)} \qquad cos(\theta) = \frac{1}{sec(\theta)} \qquad tan(\theta) = \frac{1}{cot(\theta)}$$

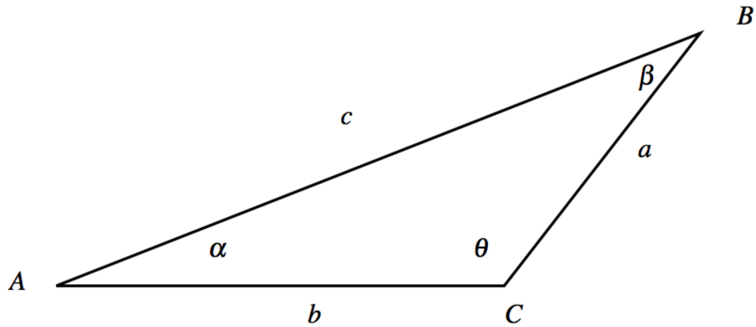


Figura 13.25: Triángulo ABC

$$csc(\theta) = \frac{1}{sen(\theta)} \qquad sec(\theta) = \frac{1}{cos(\theta)} \qquad cot(\theta) = \frac{1}{tan(\theta)}$$

Identidades de Cociente

$$tan(\theta) = \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} \qquad cot(\theta) = \frac{cos(\theta)}{sen(\theta)}$$

Identidades Pitagóricas

$$\begin{aligned} sen^2(\theta) + cos^2\theta &= 1 \\ 1 + tan^2(\theta) &= sec^2(\theta) \\ 1 + cot^2(\theta) &= csc^2(\theta) \end{aligned}$$

13.2 Ley del seno y del coseno

13.2.1 Ley del seno

La ley de los senos es la relación entre los lados y ángulos de triángulos. Establece que la relación de la longitud de un lado de un triángulo al seno del ángulo opuesto a ese lado es igual para todos los lados y ángulos en un triángulo dado.

En el triángulo ABC tenemos

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\theta)}$$

Para usar la ley de los senos necesita conocer ya sea dos ángulos y un lado del triángulo (AAL o ALA) o dos lados y un ángulo opuesto de uno de ellos (LLA).

13.2.2 Ley del coseno

La ley de los cosenos es usada para encontrar las partes faltantes de un triángulo cuando se conocen las medidas de dos lados y la medida del ángulo que estos forman (LAL) o las longitudes de los tres lados (LLL) son conocidas. En cualquiera de estos casos, es imposible usar la ley de los senos porque no podemos establecer una proporción que pueda resolverse. De acuerdo a la figura **??** la ley de los cosenos establece:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos(\theta).$$

Esto se parece al teorema de Pitágoras excepto que para el tercer término, y si $\theta = 90^\circ$ es decir un ángulo recto el tercer tármino es igual 0 porque el $cos(90^\circ)$ es 0 y se obtiene el teorema de Pitágoras. Así, el teorema de Pitágoras es un caso especial de la ley de los cosenos. La ley de los cosenos también puede establecerse como

$$\begin{array}{rcl} b^2 &=& a^2 + c^2 - 2accos(\beta) \\ a^2 &=& b^2 + c^2 - 2bccos(\alpha) \end{array}$$

Ejemplo 13.10

Dado $a = 11$, $b = 5$ y $\theta = 20^\circ$ en un triángulo, encuentre el lado y ángulos faltantes.

$$\begin{array}{rcl} c^2 &=& a^2 + b^2 - 2abcos(\theta) \\ c &=& \sqrt{a^2 + b^2 - 2abcos(\theta)} \\ &=& \sqrt{11^2 + 5^2 - 2(11)(5)(cos 20^\circ)} \\ &=& 6,5 \end{array}$$

Para encontrar los ángulos faltantes, ahora es más fácil usar la ley de los senos

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{a}{sen(\alpha)} &=& \dfrac{b}{sin(\beta)} = \dfrac{c}{sen(\theta)} \\ \dfrac{11}{sen(\alpha)} &=& \dfrac{5}{sin(\beta)} = \dfrac{6,53}{sen(20^\circ)} \\ \dfrac{11}{sen(\alpha)} &=& \dfrac{6,53}{sen(20^\circ)} \\ sin(\alpha) &=& \dfrac{11 sin(20^\circ)}{6,53} \\ sin(\alpha) &=& \dfrac{11(0,34)}{6,53} \\ sin(\alpha) &=& 0,57 \\ \alpha &=& arcsen(0,57) \\ \alpha &=& 34,9 \end{array}$$

De igual forma

$$\begin{aligned}
\frac{5}{sen(\beta)} &= \frac{6,53}{sin(20^\circ)} \\
sin(\beta) &= \frac{5sen(20^\circ)}{6,53} \\
sin(\beta) &= \frac{5(0,34)}{6,53} \\
sin(\beta) &= 0,26 \\
\beta &= arcsen(0,26) \\
\beta &= 15,07
\end{aligned}$$

Ejercicios 13.1

1. Calcular los ángulos y los lados de un rombo cuyas diagonales miden 12 y 6 m.
2. Un árbol de 50 m de alto proyecta una sombra de 60 m de larga. Encontrar el ángulo de elevación del sol en ese momento
3. Un dirigible que está volando a 800 m de altura, distingue un pueblo con un ángulo de depresión de 12. ¿ A qué distancia del pueblo se halla?
4. Hallar el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 24,6 m tiene como arco correspondiente uno de 70
5. La longitud del lado de un octógono regular es 12 m. Hallar los radios de la circunferencia inscrita y circunscrita.
6. Sabiendo que $cos(\alpha) = \frac{1}{4}$, y que $270 < \alpha < 360$. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α
7. Sabiendo que $tan(\alpha) = 2$, y que $180 < \alpha < 270$. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.
8. Calcula la altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa bajo un ángulo de 30 y si nos acercamos 10 m, bajo un ángulo de 60
9. Calcular la altura de la torre de refrigeración de una central nuclear si se sabe que su sombra mide 271 metros cuando los rayos solares forman un ángulo de 30.

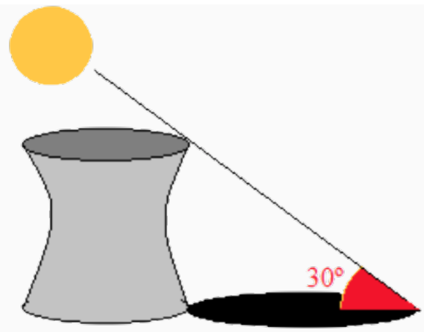


Figura 13.26: Calcular la altura de la torre de refrigeración de una central nuclear

10. Juán y Pedro ven desde las puertas de sus casa una torre, bajo ángulos de 45 y 60. La distancia entre sus casas es de 126 m y la torre está situada entre sus casas. Calcular la altura de la torre.
11. Sara y Manolo quieren saber a que? distancia se encuentra un castillo que está en la orilla opuesta de un río. Se colocan a 100 metros de distancia el uno del otro y consideran el triángulo en cuyos vértices están cada uno de los dos, y el castillo. El ángulo correspondiente al vértice en el que está Sara es de 25 y el ángulo del vértice en el que está Manolo es de 140. ¿ A qué distancia se encuentra Sara del castillo? ¿ Y Manolo?. Ver figura 13.27

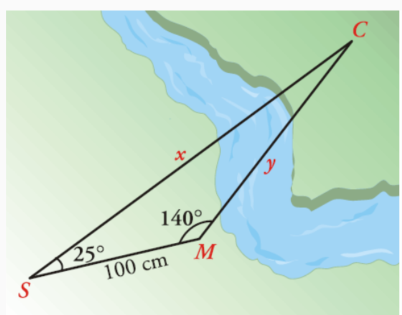


Figura 13.27: ¿ A qué distancia se encuentra Sara del castillo? ¿ Y Manolo?

12. Un parque de béisbol (tambien llamado diamante) tiene cuatro bases que forman un cuadrado y están a 90 pies una de la otra; el montículo del lanzador se halla a 50 pies del plato. Calcular la distancia del montículo del lanzador a cada uno de las otras tres bases. Recuerde realizar el gráfico que representa esta situación.
13. Un súbmarino utiliza un sonar para determinar que un barco está a cuatro millas al este y que viaja a 10 mi/h con dirección noreste 62°. Si el súbmarino viaja a 18 mi/h,. ¿En qué dirección debe deplazarse para interceptar al barco?, ¿En qué tiempo lo interceptará?. Recuerde realizar el grafico que representa esta situación.
14. De acuerdo a la figura 13.28, un telesférico transporta pasajeros desde el punto A que está a 1,2 millas del punto B, que se halla en la base de la montaña, hasta un punto P en la cima de la misma.

Los ángulos de elevación de P desde A y B son $21°$ y $65°$ respectivamente.

a) Calcular la distancia entre A y P.

b) Calcular la altura de la montaña.

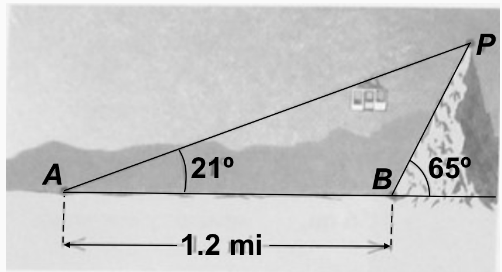


Figura 13.28: Ejercicio 14

15. Determinar el perímetro del triangulo AOB, si el diámetro de la circunferencia es 36 cm, O es el centro y ángulo B es igual a $35°$. (Ver figura 13.29)

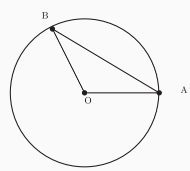


Figura 13.29: Ejercicio 15

16. Un sólido rectangular tiene lados como se indica en la figura 13.30. Encontrar el perímetro del triángulo punteado ABC.

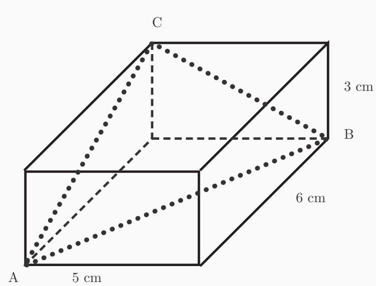


Figura 13.30: Ejercicio 16

17. Se denomina *sector circular* a la porción del plano delimitada por un arco de circunferencia y dos de sus radios. Otros métodos para definirlo sería: porción de círculo delimitada por dos de sus

rádios o por un ángulo central al mismo. El área de un sector circular está dada por las siguientes fórmulas equivalentes:

$$A = \frac{rL}{2} = \frac{r^2\theta}{2}$$

Donde r es el radio L es la longitud del arco θ es el ángulo central

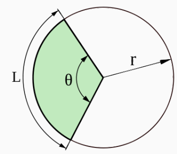


Figura 13.31: Sector circular

Si el radio del circulo es de 12 pulgadas y el área sombreada es de 48π, cual es la medida del ángulo interior del sector KOW.

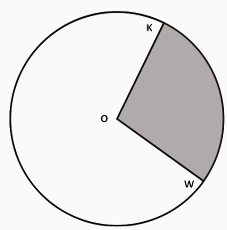


Figura 13.32: Ejercicio 17

18. Los sismólogos investigan la estructura del interior de la tierra analizando las ondas sismicas ocasionadas por los terremotos. Si se supone que el interior del globo terráqueo es homogéneo, entonces estas ondas viajarán en linea recta a una velocidad cosntante v. En la figura se exhibe una sección transversal del planeta, con el epicentro en E y un observador en S. Utilizar la ley del coseno para hallar el tiempo t para que una onda viaje por el interior de la tierra de E a S. Tenga en cuenta que $2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - \cos(\theta)$.

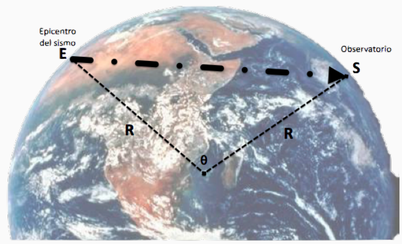


Figura 13.33: Ejercicio 18

19. Una caja rectangular tiene dimensiones de $10'' \times 5'' \times 4''$. Calcula el ángulo θ formado por una diagonal de la base de $10'' \times 5''$ y una diagonal del lado de $5'' \times 4''$.
20. Un helicóptero vuela a una altitud de 1500 pies sobre la cima de una montaña que mide 6200 pies, como se indica en la figura 13.34. Desde lo alto de esta montaña y desde el helicóptero se ve una segunda montaña, más elevada que la primera. Desde el helicóptero, el ángulo de depresión es de $51°$, y desde la cima de la primera montaña, el ángulo de elevación es de $21°$
    a) Calcula la distancia de pico a pico.
    b) Calcula la altitud de la montaña más alta.

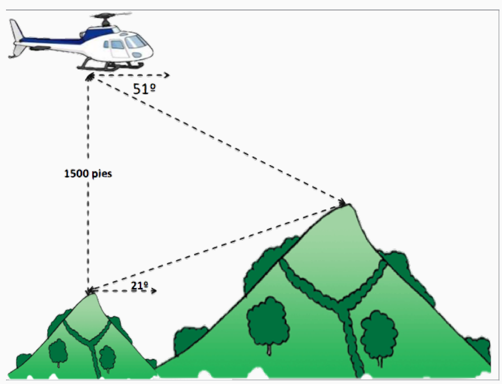


Figura 13.34: Ejercicio 20

BIBLIOGRAFÍA

[1] D. G. Zill. *Álgebra y Trigonometría* (2ª edición ed.) Mc GRAW-HILL INTERAMERICANA, S.A , Santa Fe de Bogota , 1999.

[2] M. A. Sobeli. *Precálculo* (6ª edición ed.) Pearson Educación de Mexico S. A. de C.V., Mexico, 2006.

[3] M. Serna. *Latin America and Caribbean Consortium of Engineering Institutions.* (http://www.laccei.org/LACCEI2013-Cancun/RefereedPapers/RP221.pdf) http://www.laccei.org, 2013.

[4] U. N. C. http://www.virtual.unal.edu.co: http://www.virtual.unal.edu.co/unvPortal/courses/CoursesViewer.do?reqCode=viewOfFaculty. Universidad Nacional de Colombia, 2012.

Sello Editorial
Tecnológico Comfenalco

tecnologicocomfenalco.edu.co