1. Leyes de Kepler

En 1609, como resultado de una serie de observaciones y del análisis de los datos recibidos, Kepler enuncia sus tres famosas leyes empíricas que rigen el movimiento de los planetas.
En sus enunciados, se encuentra una recopilación sobre la información del movimiento planetario expresada de forma resumida y sistemática.

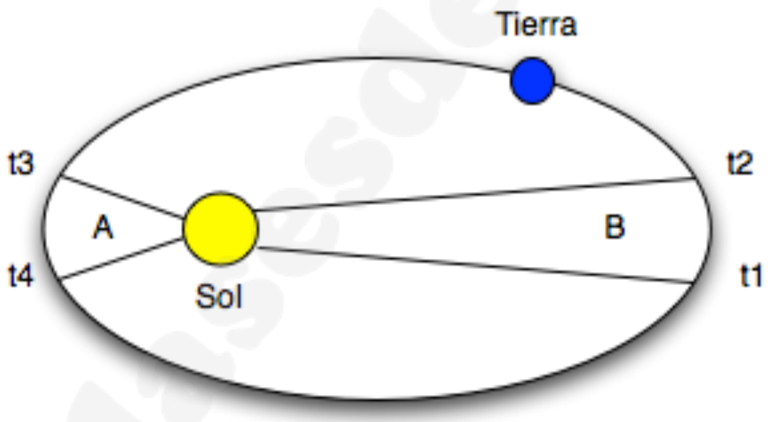
I. Ley de las Órbitas

Los planetas giran alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas en uno de cuyos focos se encuentra el Sol.
Esta ley acaba con la idea aristotélica de que la circunferencia era la trayectoria perfecta para los cuerpos celestes.

II. Ley de las Áreas.

Las áreas barridas por el radio vector que une el Sol con un planeta son directamente proporcionales a los tiempos empleados en barrerlas.

Según el dibujo:



Según el dibujo si $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$ entonces Área B = Área A.

III. La ley de los Periodos.

Los cuadrados de los periodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las respectivas órbitas.

$$\frac{T^2}{R^3} = K$$

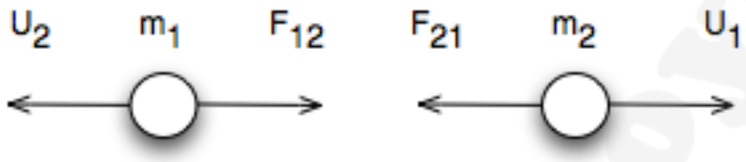
Supongamos dos planetas P_1 y P_2 que describen dos órbitas elípticas con periodos respectivos T_1 y T_2 . Según esta ley se cumple que:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}$$

2. Ley de Gravitación Universal

La Ley de Gravitación Universal fue desarrollada por Newton en 1666 basándose en las leyes de Kepler y suponiendo que las órbitas son circulares (la velocidad es constante).

Según esta ley, la fuerza de atracción entre dos masas es directamente proporcional al producto de las dos masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que les separa.



Según el dibujo, aparecen dos fuerzas:

$$\left.\begin{aligned} F_{12} &= -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_2 \\ F_{21} &= -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_1 \end{aligned}\right\}\text{dónde el signo menos indica que las fuerzas son de atracción}$$

Las características de la Fuerza Gravitatoria se pueden resumir en:

- La fuerza es siempre de atracción.

- Son siempre fuerzas de acción y reacción.

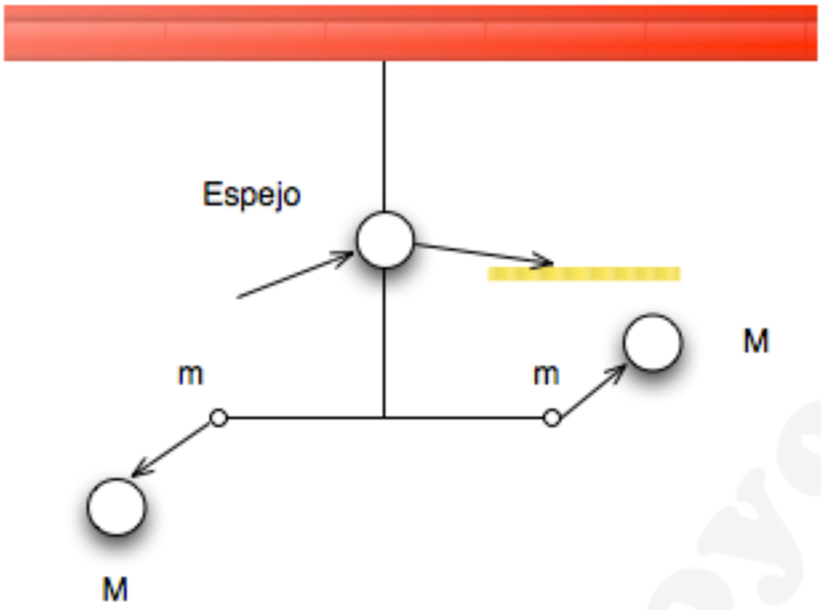
- Es una fuerza a distancia.

Valor de la constante G de gravitación.

El valor de la constante de gravitación G que aparece en la fórmula antes mostrada fue determinado experimentalmente 100 años después de la aparición de la Ley de Newton. Dicho valor fue calculado por H. Cavendish en 1798 mediante una balanza de torsión.

Consta de una barra horizontal suspendida por su punto medio de un hilo muy fino. Intercalado en el hilo hay un espejo E sobre el que incide un rayo de luz que después de reflejarse se recoge sobre una escala graduada.

La barra lleva en sus extremos sendas esferas de masa m. A ambos lados de la barra y en el mismo plano horizontal se encuentran dos esferas de masa M >>> m.



Al situar las dos masas grandes en las proximidades de las pequeñas esferas, los efectos de la fuerza de atracción gravitatoria se hacen visibles al estar atraídas de acuerdo con la Ley de Gravitación Universal y el hilo se retuerce. La torsión que experimenta el hilo se mide por la desviación que experimenta la luz reflejada en la escala. El momento del par de fuerzas es proporcional al ángulo de torsión.

$$F \cdot l = k \cdot \varphi$$

$$G\frac{Mm}{r^2}l = k \cdot \varphi \rightarrow G = \frac{k \cdot \varphi \cdot r^2}{M \cdot m \cdot l} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}$$

F = la atracción entre las masas m y M.

l = la longitud de la barra.

k = la constante elástica del hilo.

φ = el ángulo descrito por la luz reflejada

3. Campo gravitatorio

Se llama campo a la perturbación del espacio producida por una magnitud física. En el caso de ser una masa se denomina campo gravitatorio, de ser una carga recibe el nombre de campo eléctrico y si es producida por una corriente eléctrica recibe el nombre de campo magnético.

El campo gravitatorio se mide mediante la intensidad del mismo. Se representa con $\vec{g}$ y es la fuerza por unidad de masa colocada en el punto dónde se calcula el campo.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u} \quad \text{N/Kg (dónde el signo menos indica que el campo es de atracción)}$$

De esta expresión se deduce:

- La intensidad del campo en cada punto representa la aceleración de la gravedad en dicho punto.

- A diferencia de lo que pensaba Aristóteles, dicha aceleración gravitatoria es independiente de la masa del objeto.

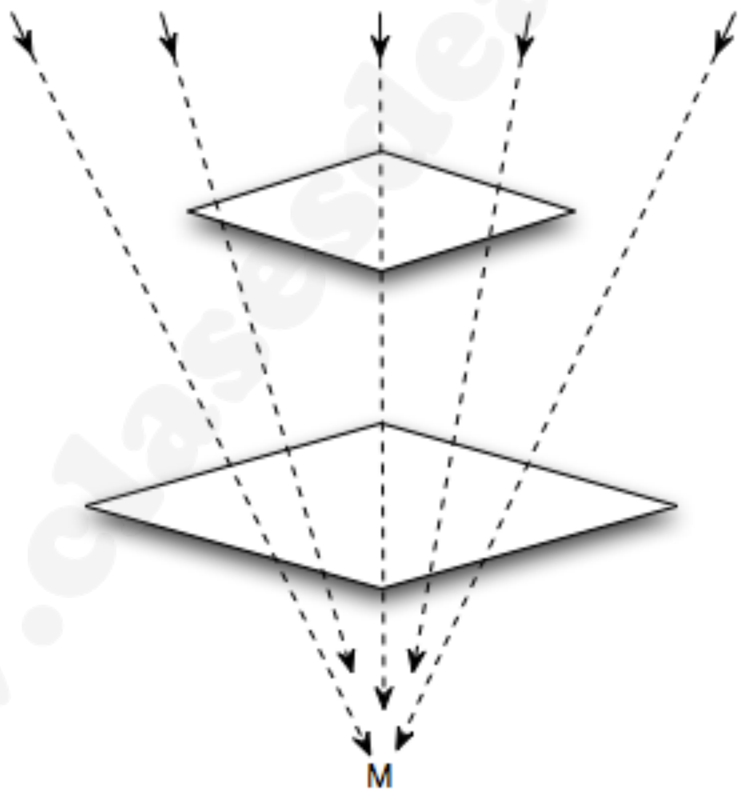
- Que la dirección del vector $\vec{g}$ es la línea recta que une el objeto con el centro de la Tierra.

- El sentido de dicho vector siempre va dirigido hacia el objeto que genera el campo gravitatorio.

Representación del campo gravitatorio

El campo gravitatorio se puede representar mediante las líneas de campo o **líneas de fuerza**, las cuales son líneas tales que la intensidad del campo en cada punto es tangente a ellas y la densidad de las mismas (es decir, el número de líneas que atraviesan la unidad de superficie perpendicular al campo) es proporcional a la intensidad del mismo.

Por ejemplo, si atendemos al siguiente dibujo:



y suponiendo que cada línea de fuerza representa posee una intensidad de 2 N / C, se tiene que para la primera superficie existe un campo de 6 N / C y para la segunda un campo de 10 N / C.

El campo gravitatorio también es posible representarlo mediante **superficies equipotenciales**, las cuales se definen como el lugar geométrico de los puntos que se encuentran al mismo potencial.
En el caso de una sola masa, las superficies equipotenciales serán circunferencias o esferas concéntricas con la masa.

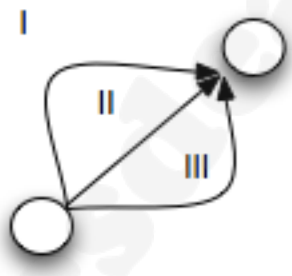
Además, las superficies equipotenciales son en cada punto perpendiculares a las líneas de fuerza.

Un **campo es uniforme** si es constante en dirección, módulo y sentido.

Un **campo es central** si el módulo de la intensidad solo depende de la distancia al punto dónde se calcula el campo y va dirigido siempre hacia el mismo punto (el campo gravitatorio es central).

4. Campos conservativos. Energía potencial gravitatoria.

Un campo es conservativo si el trabajo realizado por las fuerzas del campo solo depende del punto inicial y del punto final pero no de la trayectoria seguida.

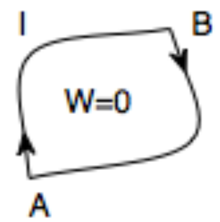


En el dibujo, si el campo es conservativo: $W_I = W_{II} = W_{III}$

Ejemplos de campos conservativos son el gravitatorio y el eléctrico.

De la definición de campo conservativo se deducen dos consecuencias importantes:

I) El trabajo realizado por una fuerza conservativa a lo largo de un ciclo cerrado es nulo.



$$W = \oint \vec{F}\,d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}\,d\vec{r} + \int_B^A \vec{F}\,d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}\,d\vec{r} - \int_A^B \vec{F}\,d\vec{r} = 0$$

II) El trabajo realizado por una fuerza conservativa es igual a la disminución de una magnitud denominada energía potencial: $W = -\Delta E_p$

Por el teorema de las fuerzas vivas, el trabajo de la fuerza resultante es igual a la variación de la energía cinética: $W = \Delta E_c$.

Además puesto que las fuerzas del campo gravitatorio son conservativas se tiene que:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p \rightarrow \Delta E_c + \Delta E_p = 0 \rightarrow \Delta(E_c + E_p) = 0$$

Puesto que dicho incremento es 0, se tiene entonces que:

$$E_c + E_p = \text{constante (Principio de consevación de la energía mecánica)}$$
$$\mathrm{E}_{C,Inicial} + E_{P,Inicial} = \mathrm{E}_{C,Final} + E_{P,Final}$$

La energía potencial gravitatoria de una masa m en un punto por tanto queda definida como el trabajo para trasladar la masa desde el punto hasta el infinito.

$$\Delta E_p = -W = -\int_A^\infty \vec{F} \circ d\vec{r} = -\int_A^\infty G\frac{Mm}{r^2} \cdot dr \cdot \cos(180^o) = -\int_A^\infty -G\frac{Mm}{r^2} dr = GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_A^\infty =$$
$$= 0 - (-G\frac{Mm}{r_A})$$

Por tanto la Energía Potencial Gravitatoria que definida como:

$$E_p = -G\frac{Mm}{r_A} J$$

y siempre es negativa.

El sentido físico de dicho signo es el siguiente: según el Teorema de la Energía Potencial, el trabajo realizado por una fuerza conservativa es igual a la disminución de energía potencial. Por consiguiente, a medida que la fuerza gravitatoria realiza el trabajo de aproximación de las dos masas, la energía potencial disminuye. Si inicialmente la energía potencial es 0, forzosamente al final del desplazamiento será negativa.

Finalmente, el signo de la magnitud trabajo W nos define si las masas se separan o están acercándose:

- Si W < 0, la energía potencial aumenta y por tanto se alejan.
- Si W > 0, la energía potencial disminuye y ocurre cuando las masas se aproximan.

5. Potencial gravitatorio.

Se llama potencial gravitatorio en un punto a la energía potencial gravitatoria por unidad de masa colocada en dicho punto:

$$V_g = \frac{E_p}{m} = \frac{-G\frac{Mm}{r}}{m} = -G\frac{M}{r}\ J/Kg$$

Al igual que la energía potencial, siempre es negativo.

Se denomina diferencia de potencial entre dos puntos a la variación de energía potencial por unidad de masa:

$$V_A - V_B = \frac{\Delta E_p}{m} = -\frac{GM}{r_A} - \left(-G\frac{M}{r_B}\right)$$

Por tanto, el trabajo para trasladar una masa m desde el punto A al punto B viene dado por:

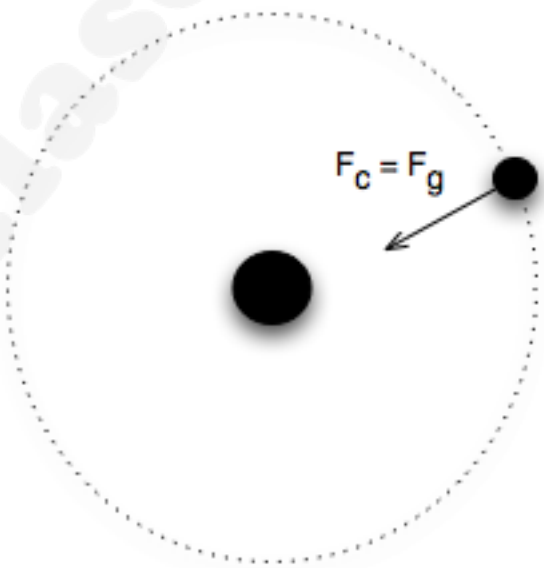
$$W = m\left(V_A - V_B\right)$$

6. Movimiento de planetas y de satélites

Según la primera Ley de Kepler los planetas giran en órbitas alrededor del Sol que está colocado en uno de los focos. Sin embargo, debido a la pequeña excentricidad de las elipses, las órbitas las podemos considerar circulares.

Velocidad orbital y periodo de revolución.

Si un satélite gira alrededor de un planeta, estará sometido a una fuerza centrípeta producida por la fuerza de la gravedad.



Por tanto se tiene que:

$$F_c = F_g \rightarrow G\frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \rightarrow v_c = \sqrt{G\frac{M}{r}} m/s^2$$

siendo M la masa del planeta sobre el que se realiza la órbita.

Por tanto, esa velocidad a la que llamaremos **velocidad cósmica**, es la velocidad exacta que debe poseer un objeto que orbita alrededor de un planeta.

En la actualidad, para colocar satélites en órbita se realiza el siguiente proceso:

1) Se lleva al satélite a una altura h mediante cohetes de lanzamiento.

2) Desde esa altura se lanza al satélite con una velocidad horizontal, v_0 que marca el tipo de trayectoria en función de la velocidad cósmica del objeto:

- Si $v_0 < v_c$ el satélite cae sobre la superficie del planeta describiendo un arco de parábola.
- Si $v_o = v_c$ el satélite permanece en órbita describiendo una circunferencia gracias a la fuerza gravitatoria y la fuerza centrípeta.
- Si $v_o > v_c$ la órbita será una elipse cuya excentricidad aumentará a medida que aumente la velocidad del lanzamiento.

Por otra parte, se llama periodo de revolución al tiempo que tarda el satélite en dar una vuelta completa alrededor de un planeta.

Puesto que el movimiento que sigue el satélite alrededor de la Tierra es un Movimiento Circular Uniforme, se tiene que:

$$e = v \cdot t \rightarrow 2\pi r = v \cdot T \rightarrow T = \frac{2\pi r}{\sqrt{G\frac{M}{r}}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M}} (segundos)$$

Mediante esta expresión del periodo podemos aplicar la Tercera Ley de Kepler para deducir el valor de la constante K:

$$K = \frac{T^2}{R^3} = \frac{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Momento angular de un planeta/satélite.

Recordaremos que momento de una fuerza es el producto vectorial de dicha fuerza por el vector radio $\left(\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}\right)$ y que el momento angular viene dado por:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$$
$$|\vec{L}| = m|\vec{r}||\vec{v}|\,sen(\alpha)$$

Para estudiar el carácter del momento angular atenderemos a la variación temporal del momento angular:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r}\,\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r}\,\frac{d(m\vec{v})}{dt} = 0 + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

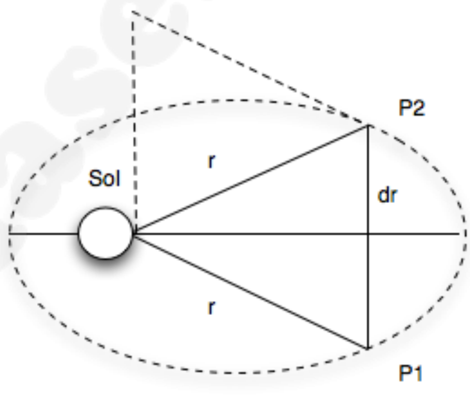
Todos los satélites y planetas como hemos visto se mueven debido a la actuación de fuerzas gravitatorias centrales, lo cual implica que el momento de dichas fuerzas es 0 y por tanto el momento angular ha de ser constante según lo visto en el desarrollo anterior (si la derivada es 0, es porque la función es constante).

$\vec{L}$ representa dicho momento angular que ha de ser constante en dirección, sentido y módulo, lo cual implica que:

- Puesto que $\vec{L}$ es constante en dirección y es perpendicular al plano que forman $\vec{r}$ y $\vec{v}$, los planetas siempre se mueven en el mismo plano.

- Además como $\vec{L}$ es constante en sentido, los planetas siempre se mueven en el mismo sentido.

- Finalmente, si $\vec{L}$ es constante en módulo, vamos a comprobar que trae consigo la Segunda Ley de Kepler.



Si un planeta pasa de un punto P_1 a P_2 en un tiempo dt, el radio $\vec{r}$ barre un área que será la mitad del área del paralelogramo y por tanto:

$$dA = \frac{1}{2}\left|\left(\vec{r} \times d\vec{r}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\vec{r} \times (\vec{v}dt)\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\vec{r} \times \vec{v}\right)\right|dt$$

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r} \times \vec{p}\right| = \left|\vec{r} \times m\vec{v}\right| = m\left|\vec{r} \times \vec{v}\right| \rightarrow \left|\vec{r} \times \vec{v}\right| = \frac{\left|\vec{L}\right|}{m}$$

$$dA = \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{L}\right|}{m}dt \rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{L}\right|}{m}$$

A $\frac{dA}{dt}$ se le denomina **velocidad aerolar**, la cual también es constante.

7. Energía mecánica de un satélite en órbita.

La energía mecánica de un satélite en órbita será la suma de su energía cinética y su energía potencial:

$$E_m = E_c + E_p = \left(\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M \cdot m}{r}\right)J$$

$$\text{Además, como:}$$

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}} \rightarrow E_m = \frac{1}{2}m\frac{G \cdot M}{r} - G\frac{M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{M \cdot m}{r}J$$

Atendiendo al anterior resultado se pueden sacar las siguientes relaciones:

$$E_m = \frac{1}{2}E_p$$

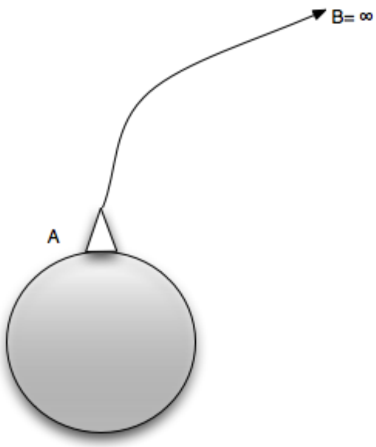
$$\frac{E_p}{E_c} = -\frac{1}{2}$$

8. Velocidad de escape de un cohete.

Para conseguir que un cohete lanzado desde la superficie de un planeta salga del campo gravitatorio de este habrá que comunicarle una gran velocidad. A la velocidad mínima de lanzamiento de un cohete para que éste pueda escapar de la atracción del planeta se le llama velocidad de escape.

Con el fin de estudiar el valor de la velocidad de escape comenzaremos recordando que la Energía Mecánica es una magnitud conservativa, es decir, en dos puntos A y B posee igual valor.

Además, supondremos que el punto final (B) al que llega el cohete es el infinito dónde se detiene (esta suposición siempre se hace cuando queremos que un objeto “escape” del campo gravitatorio creado por un planeta). Por tanto se tiene la siguiente situación:



Si calculamos la energía mecánica en los puntos A y B se tiene que:

$$E_{mA} = E_{cA} + E_{pA} = \frac{1}{2} m v_A^2 - G\frac{M \cdot m}{R_{planeta}}$$

Si consideramos que el objeto en el momento del lanzamiento no está orbitando y por tanto no posee ninguna velocidad se tiene que:

$$E_{mA} = -G\frac{M \cdot m}{R_{planeta}}$$

Por otra parte, para calcular la energía mecánica en el punto B (el infinito) recordaremos que allí el objeto ha perdido toda la velocidad y por tanto:

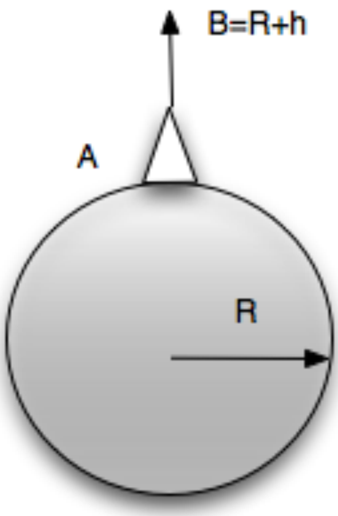
$$E_{mB} = E_{cB} + E_{pB} = \frac{1}{2} m v_B^2 - G\frac{M \cdot m}{r_B} = 0 - G\frac{M \cdot m}{\infty} = 0$$

Entonces, como la energía mecánica final es 0 tiene que haber habido una variación de energía mecánica, ya que en el punto A era no nula. Esta variación de energía, que aparece como consecuencia de considerar la energía mecánica como conservativa es la que denominaremos energía de escape, y se considera que es una energía cinética:

$$E_{escape} = \Delta E_m = E_{mB} - E_{mA} = 0 - \left(-G\frac{M \cdot m}{R_{planeta}}\right) = G\frac{M \cdot m}{R_{planeta}}$$

$$E_{escape} = \frac{1}{2} m v_{escape}^2 = G\frac{M \cdot m}{R_{planeta}} \rightarrow v_{escape} = \sqrt{2G\frac{M}{R_{planeta}}} = \sqrt{2G\frac{M}{R} \cdot \frac{R}{R}} = \sqrt{2 g_{planeta} R_{planeta}}$$

Por otra parte, en el caso de haber querido que el objeto únicamente llegue a una altura h sin escapar del campo gravitatorio tendremos la siguiente situación:



Ahora las energías mecánicas quedan expresadas de la siguiente forma (suponiendo que la velocidad en el momento del lanzamiento es 0, es decir, no está orbitando al igual que para el punto B dónde se detiene y vuelve a caer):

$$E_{mA} = E_{cA} + E_{pA} = \frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{M \cdot m}{R_{planeta}} = -G\frac{M \cdot m}{R_{planeta}}$$
$$E_{mB} = E_{cB} + E_{pB} = \frac{1}{2}mv_B^2 - G\frac{M \cdot m}{R_{planeta}+h} = -G\frac{M \cdot m}{R_{planeta}+h}$$

Por tanto, el incremento de energía mecánica aparecido será consecuencia de la energía cinética que se le comunica al objeto para que despegue por medio de la velocidad de lanzamiento:

$$E_{lanzamiento} = \Delta E_m = E_{mB} - E_{mA} = \left(-G\frac{M \cdot m}{R_{planeta}+h}\right) - \left(-G\frac{M \cdot m}{R_{planeta}}\right) = G \cdot M \cdot m\left(\frac{1}{R_{planeta}} - \frac{1}{R_{planeta}+h}\right)$$
$$E_{lanzamiento} = \frac{1}{2}mv_{lanzamiento}^2 = G \cdot M \cdot m\left(\frac{M \cdot m}{R_{planeta}} - \frac{M \cdot m}{R_{planeta}+h}\right) \rightarrow v_{lanzamiento} = \sqrt{2G \cdot M_T\left(\frac{1}{R_{planeta}} - \frac{1}{R_{planeta}+h}\right)}$$

Atendiendo a los resultados podemos extraer las siguientes conclusiones:

- La velocidad de escape no depende de la masa del objeto que se lanza.

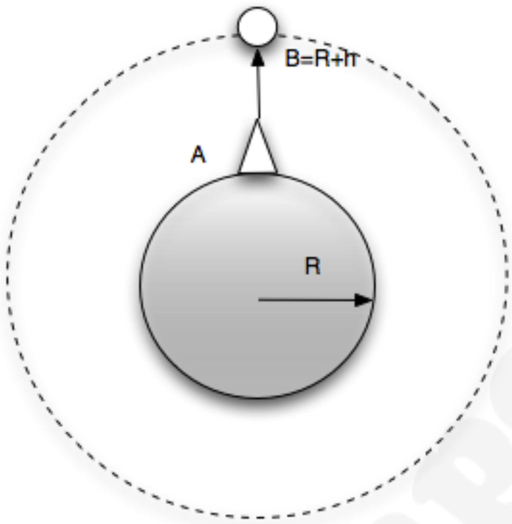
- Para escapar del campo gravitatorio, la distancia mínima a la que el objeto debe detenerse es $r = \infty$.

- Si la velocidad de lanzamiento es mayor que la velocidad de escape, el objeto llegará a la distancia $r = \infty$ con una cierta velocidad puesto que no será necesario que agote toda su energía cinética en escapar del campo gravitatorio.

9. Velocidad de satelización y cambio de órbita.

Una vez comprendida la velocidad de escape, cabe preguntarse qué velocidad es necesaria si pretendemos que el objeto lanzado en vez de caer se quede orbitando alrededor del planeta.

Es decir, nos encontramos ante la siguiente situación:



En este caso volveremos a calcular el incremento de energía mecánica para saber cual ha de ser la energía de lanzamiento para compensar dicho incremento:

$$E_{mA} = E_{cA} + E_{pA} = \frac{1}{2} m v_A^2 - G\frac{M \cdot m}{R_{planeta}} = -G\frac{M \cdot m}{R_{planeta}}$$

$$E_{mB} = E_{cB} + E_{pB} = \frac{1}{2} m v_B^2 - G\frac{M \cdot m}{R_{planeta} + h}$$

Nótese que la velocidad que alcanza en B es con la que permanece girando alrededor de la Tierra y puede calcularse mediante la igualación de la fuerza gravitatoria con la centrípeta:

$$F_g = F_c \rightarrow G\frac{M \cdot m}{(R+h)^2} = \frac{m v_B^2}{R+h}$$

Por tanto, el incremento de energía mecánica puede expresarse como la energía de satelización con el siguiente desarrollo:

$$E_{satelización} = \Delta E_m = E_{mB} - E_{mA} = \frac{1}{2} m v_B^2 - G\frac{M \cdot m}{R+h} - \left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right) = -\frac{1}{2} G\frac{M \cdot m}{R+h} + G\frac{M \cdot m}{R} =$$

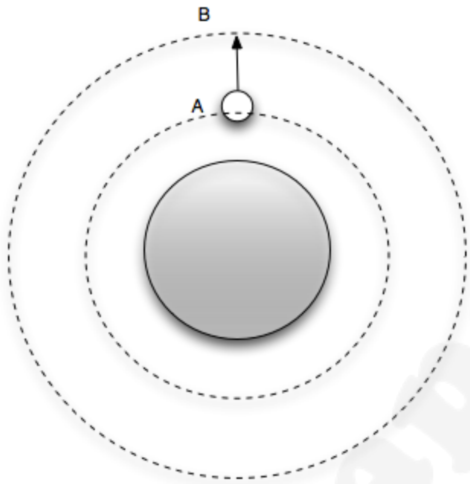
$$= G \cdot M \cdot m\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2}\frac{1}{R+h}\right)$$

Puesto que esta energía de satelización puede considerarse de carácter cinético, la velocidad de satelización queda expresada como:

$$E_{satalización} = \frac{1}{2} m v^2_{satalización} = G \cdot M \cdot m \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2} \frac{1}{R+h} \right) \rightarrow$$

$$v_{satelización} = \sqrt{G \cdot M \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{R+h} \right)}$$

En cuanto al cambio de órbita de un satélite tenemos la siguiente situación:



Para que esto ocurra, es necesario comunicar una velocidad al satélite de modo que pueda saltar a una órbita superior o inferior.

Este salto, supone una variación de energía mecánica que representa la energía necesaria para realizar el cambio de órbita y que puede ser considerada al igual que en los casos anteriores como una energía cinética.

Además, cabe recordar que tanto en el punto A como en el B el satélite está girando alrededor del planeta, por lo que posee una velocidad fruto de la igualación de la fuerza gravitatoria con la fuerza centrípeta.

$$E_{Cambio\ órbita} = \Delta E_m = E_{mB} - E_{mA} = \left(-\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{R_B} \right) - \left(-\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{R_A} \right) = \frac{1}{2} G \cdot M \cdot m \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right);$$

$$E_{Cambio\ órbita} = \frac{1}{2} m v^2_{cambio} = \frac{1}{2} G \cdot M \cdot m \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right) \rightarrow v_{cambio} = \sqrt{GM \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)}$$

10. Campo gravitatorio terrestre.

La fuerza de Gravitación Universal aplicada a la Tierra de masa M_T viene dada por:

$$\vec{F} = -G \frac{M_T m}{r^2} \vec{u}$$

dónde r es la distancia desde el centro de la Tierra a la masa m.

Se llama campo gravitatorio terrestre a la perturbación del espacio debido a la masa de la Tierra. Se mide mediante la intensidad de campo gravitatorio terrestre:

$$\vec{g} = -G\frac{M_T}{r^2}\vec{u}$$

A una altura h sobre la superficie terrestre, el campo gravitatorio tendrá el valor:

$$\vec{g} = -G\frac{M_T}{(R_T + h)^2}\vec{u}$$

siendo:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,Nm^2/kg^2$$
$$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,Kg$$
$$R_T = 6{,}37 \cdot 10^{6}\,m$$

Por otra parte, a la fuerza con la que se atraen dos cuerpos se le denomina peso:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

11. Energía y potencial gravitatorio terrestre.

Se llama energía potencial gravitatoria terrestre de una masa m en un punto al trabajo para trasladar la masa desde el punto hasta el infinito:

$$E_p = -G\frac{M_T m}{r} = -G\frac{M_T m}{(R_t + h)}$$

Variación de energía potencial entre dos puntos:

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = \left(-G\frac{M_T m}{R_T + h}\right) - \left(-G\frac{M_T m}{R_T}\right) = GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right) = GM_T m\left(\frac{R_T + h - R_T}{R_T(R_T + h)}\right) =$$

$$= GM_T m\left(\frac{h}{R_T^2 + R_T h}\right) = GM_T m\frac{R_T^2}{R_T^2}\left(\frac{h}{R_T^2 + R_T h}\right) = gm\left(\frac{hR_T^2}{R_T(R_T + h)}\right) =$$

$$= gm\left(\frac{hR_T}{R_T + h}\right) = gm\left(\frac{h}{1 + \frac{h}{R_T}}\right) = mgh$$

Para llegar a este resultado se tuvo en cuenta que:

1) $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$

2) Como $h <<< R \Rightarrow \frac{h}{R} = 0$

Para poder aplicar correctamente la fórmula $\Delta E_p = mgh$ hay que tener presentes las siguientes cuestiones:

1) La fórmula representa variaciones de energía potencial. Por tanto solamente tiene sentido cuando se establece un nivel de referencia.

2) La energía potencial se mide en Julios. Para ello la masa debe estar expresada en Kg, el desplazamiento h en metros y para la gravedad se toma $g = 9{,}8 m/s^2$.
3) La fórmula sólo es aplicable cuando el valor de h sea despreciable con respecto al radio de la Tierra. En otro caso se debe usar el término general descrito anteriormente:

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = \left(-G\frac{M_t m}{R_T + h}\right) - \left(-G\frac{M_T m}{R_T}\right) = GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)$$

Se llama potencial gravitatorio terrestre a un punto a la energía potencial gravitatoria terrestre por unidad de masa colocada en el punto:

$$V_g = \frac{E_p}{m} = -G\frac{M_T}{R_T}$$

Fórmulas

Tercera Ley de Kepler

$$K=\frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{GM}$$

Ley de Gravitación Universal

$$\vec{F}=-G\frac{m_1m_2}{r^2}\vec{u}\ N$$

Intensidad del campo gravitatorio

$$\vec{g}=\frac{\vec{F}}{m}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}\ \ \text{N/Kg}$$

Energía potencial del campo gravitatorio

$$E_p=-G\frac{Mm}{R}J$$

Potencial gravitatorio

$$V_g=-G\frac{M}{r}J/Kg$$

Trabajo gravitatorio para ir de A a B

$$W=m\left(V_A-V_B\right)$$

Si W < 0 el trabajo lo realiza el campo y la energía potencial disminuye. El objeto se aleja. Si W > 0 el trabajo se realiza contra el campo y la energía potencial aumenta. El objeto se acerca.

Movimiento de planetas y satélites

$$2\pi r=v\cdot T$$

$$F_c=F_g\rightarrow G\frac{M\cdot m}{r^2}=\frac{mv^2}{r}\rightarrow v_c=\sqrt{G\frac{M}{r}}m/s^2$$

$$E_c=\frac{1}{2}mv_c^2$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} E_p$$

$$\frac{E_p}{E_c} = -\frac{1}{2}$$

Energía y velocidad de escape para un objeto (escapar del campo gravitatorio)

$$E_{escape} = \Delta E_m = E_{mB} - E_{mA} = G \frac{M \cdot m}{R_{planeta}}$$

$$E_{escape} = \frac{1}{2} m v_{escape}^2 = G \frac{M \cdot m}{R_{planeta}} \rightarrow v_{escape} = \sqrt{2G \frac{M}{R_{planeta}}} = \sqrt{2G \frac{M}{R} \cdot \frac{R}{R}} = \sqrt{2 g_{planeta} R_{planeta}}$$

Energía y velocidad para colocar un objeto a una altura h

$$E_{lanzamiento} = \Delta E_m = E_{mB} - E_{mA} = G \cdot M \cdot m \left(\frac{1}{R_{planeta}} - \frac{1}{R_{planeta} + h} \right)$$

$$E_{lanzamiento} = \frac{1}{2} m v_{lanzamiento}^2 \rightarrow v_{lanzamiento} = \sqrt{2G \cdot M_T \left(\frac{1}{R_{planeta}} - \frac{1}{R_{planeta} + h} \right)}$$

Energía y velocidad de satelización

$$E_{satalización} = \frac{1}{2} m v_{satalización}^2 = G \cdot M \cdot m \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2} \frac{1}{R+h} \right) \rightarrow$$

$$v_{satelización} = \sqrt{G \cdot M \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{R+h} \right)}$$

Energía y cambio de órbita

$$E_{Cambio\ órbita} = \Delta E_m = E_{mB} - E_{mA} = \frac{1}{2} G \cdot M \cdot m \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right);$$

$$E_{Cambio\ órbita} = \frac{1}{2} m v_{cambio}^2 = \frac{1}{2} G \cdot M \cdot m \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right) \rightarrow v_{cambio} = \sqrt{GM \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)}$$

Momento angular de un planeta o satélite (es constante)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$$

$$|\vec{L}| = m |\vec{r}| |\vec{v}| sen(\alpha)$$