

ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN Y SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Cálculo diferencial de funciones de una variable.
- Cálculo integral de funciones de una variable.
- Derivación de la función compuesta e implícita.
- Representación de curvas planas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A continuación se presentan los objetivos específicos del Tema 4, indicando en cada uno de ellos los ejercicios propuestos del tema y los ejercicios resueltos de la bibliografía que le corresponden. Las abreviaturas que encabezan cada línea hacen referencia a los siguientes libros, documentos o bloques de enunciados:

A) Tomo 5 de la Colección FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS, de Álvarez, Herrero y Ruiz.
G) CÁLCULO II. Teoría y problemas de funciones de varias variables, de García y otros; editorial GLAGSA.
N) FUNDAMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES, de Nagle y Staff; editorial Addison-Wesley Ib.
EP) Enunciados de los ejercicios propuestos de este tema.
ER) Ejercicios resueltos de este tema.
EG) Ejercicios y actividades en la página del proyecto Gematic, cuya dirección es: <http://www.gematic.unican.es/index.php/edos-segundo-orden/material-interactivo>
 Los objetivos específicos de este tema son:

Los objetivos específicos de este tema son:

1. Poder definir los conceptos básicos del tema.
 EP 1 a 8.
2. Saber si una función es solución de una e.d.o. de segundo orden . Dadas una familia biparamétrica de curvas y una e.d.o. de segundo orden saber comprobar que la familia es la solución general de la ecuación. Para una familia biparamétrica de curvas, saber encontrar la ecuación cuya solución general es la familia dada.
 A Cap.6, Sec.3: Ejemplo 6.23; Cap.6, Sec.4: Ejercicio 6.8;
 EG Ejercicios preliminares 1 a 4;
 EP 1, 4 y 6.
3. Conocida la solución general de una e.d.o., poder encontrar la particular correspondiente a unas condiciones iniciales o de frontera. Dado un problema de valor inicial, saber analizar si existe solución y ésta es única.
 A Cap.6, Sec.2: Ejemplo 6.24;
 N Cap.4, Sec.2: Ejemplos 2 y 3;

EG Ejercicios preliminares 5 a 7; Ejercicios interactivos 1 y 2;

EP 2, 3 y 8.

4. Poder utilizar el método de reducción de orden para encontrar una segunda solución de una ecuación lineal homogénea de segundo orden, conocida una primera solución.

A Cap.6, Sec.3: Ejemplo 6.24; Cap.6, Sec.4: Ejercicio 6.10;

G Capítulo 19: Problema resuelto 4;

N Cap.4, Sec.4: Ejemplos 1;

EP 9.

5. Determinar si un conjunto de soluciones de una ecuación homogénea es un sistema fundamental.

N Cap.4, Sec.3: Ejemplos 1 a 4;

EP 4 y 5.

6. En ecuaciones lineales no homogéneas, conocer la construcción de la solución general a partir de una particular y de la general de la homogénea asociada. Saber utilizar el principio de superposición, para simplificar la resolución.

G Cap.19: Problema resuelto 17;

N Cap.4, Sec.7: Ejemplos 1, 2;

EP 10 y 13.

7. Saber encontrar la solución general de una e.d.o. lineal homogénea de segundo orden de coeficientes constantes, manejando la relación entre las raíces de la ecuación característica y el sistema fundamental de soluciones.

A Cap.6, Sec.3: Ejemplos 6.27, 6.28; Cap.6, Sec.4: Ejercicio 6.11;

G Cap.19: Problemas resueltos 7, 9b, 19;

N Cap.4, Sec.3: Ejemplos 1 a 4; Cap.4, Sec.5: Ejemplos 1 a 3; Cap.4, Sec.6: Ejemplos 1, 2;

EG Ejercicios preliminares 8 a 11; Ejercicio 6;

EP 12.

8. Discriminar cuándo se pueden utilizar los métodos de coeficientes indeterminados y variación de constantes para la búsqueda de soluciones particulares y saber emplearlos.

A Cap.6, Sec.3: Ejemplos 6.30 a 6.32; Cap.6, Sec.4: Ejercicios 6.13 a 6.16;

G Cap.19: Problemas resueltos 12, 14;

N Cap.4, Sec.8: Ejemplo 1 a 7;

EP 13 y 14.

9. Saber utilizar el cambio de variable en ecuaciones diferenciales de orden superior a uno.

G Cap.19: Problemas resueltos 1, 2, 15;

N Cap.4, Sec.10: Ejemplos 1, 2;

EP 11.

10. Poder transformar un problema de valor inicial sobre una e.d.o. lineal en un sistema de ecuaciones de primer orden para su posterior resolución analítica o numérica.

G Cap.21: Problemas resueltos 11, 12;

N Cap.5, Sec.6: Ejemplos 1, 2; Cap.9, Sec.2: Ejemplos 3;

EG Ejercicios preliminares 12; Ejercicios interactivos 8 a 10;

EP 18, 19 y 20.

11. Saber obtener la solución analítica de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes de primer orden.

N Cap.9, Sec.2: Ejemplo 1;

EP 26.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES. GENERALIDADES

1 Introducción

Una aplicación clásica de las ecuaciones diferenciales se presenta en el estudio de un circuito eléctrico que consiste en resistores, inductores y capacitores, al cual se aplica una fuerza electromotriz. En este caso una aplicación de las leyes de Kirchoff conduce a la ecuación

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t)$$

donde L es la inductancia, R la resistencia, C la capacitancia, $E(t)$ la fuerza electromotriz, $q(t)$ la carga y t el tiempo. Esta ecuación diferencial constituye un ejemplo de las ecuaciones diferenciales que se estudiarán en este tema: las ecuaciones lineales de segundo orden.

2 Definición ecuación diferencial de orden n

Ecuación diferencial lineal de orden n.- Es una ecuación de la forma:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

Ecuación diferencial lineal de orden n homogénea.- Es aquella en la cual $b(x) = 0$.

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

Si $b(x) \neq 0$, la ecuación lineal se llama no homogénea o completa.

Ecuación diferencial lineal de orden n de coeficientes constantes.- Es una ecuación de la forma:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x), \quad a_i \in \mathbb{R}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN 2

Centraremos nuestro estudio en las ecuaciones lineales de segundo orden, cuya forma canónica es:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad (1)$$

Los resultados obtenidos para estas ecuaciones se generalizan fácilmente a ecuaciones lineales de orden superior a 2.

3 Soluciones

Solución general.- Una familia biparamétrica de funciones $\phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ es solución general de la ecuación (1) si cada función de la familia satisface la ecuación y si dados unos valores y_0 e y_1 , existen C_1 y C_2 tales que la correspondiente función cumpla que $y(x_0) = y_0$ y que $y'(x_0) = y_1$.

Conocida la solución general, puede obtenerse la ecuación diferencial de la familia por derivación y eliminación de parámetros.

Solución particular.- Es cada una de las funciones que se obtiene de la solución general al dar valores a los parámetros.

Solución singular.- Es una solución que no puede extraerse de la solución general.

4 Problemas asociados

Problema de valores iniciales (PVI).- Es el formado por la ecuación diferencial junto con los valores que debe de tomar la solución y su derivada en un mismo punto $x = x_0$:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

Problema de valores en la frontera.- Es el formado por la ecuación diferencial junto con los valores fijados para la solución en dos puntos distintos $x = x_0$ y $x = x_1$:

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

Problema mixto.- Es el formado por la ecuación diferencial junto con los valores fijados de la solución y su derivada en dos puntos distintos $x = x_0$ y $x = x_1$:

$$\alpha_1 y(x_0) + \alpha_2 y'(x_0) = 0, \quad \beta_1 y(x_1) + \beta_2 y'(x_1) = 0, \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$$

5 Existencia y unicidad de un PVI

Las condiciones de existencia y unicidad de la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

vienen dadas por el siguiente teorema:

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD.- Si $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son funciones continuas en un intervalo (a, b) , si x_0 es un punto cualquiera de (a, b) y si y_0 e y_1 son números cualesquiera, entonces la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ tiene solución única, $y(x)$, en este intervalo, cumpliendo $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

6 Solución general de la ecuación

TEOREMA.- Si se denota por y_p cualquier solución particular de la ecuación completa y por y_h la solución general de la homogénea asociada, entonces la solución general de la completa es: $y = y_p + y_h$

Así pues, a la hora de resolver una ecuación diferencial lineal debemos resolver dos problemas:

- encontrar la ecuación general de la homogénea asociada y
- encontrar una particular de la completa.

Se abordará ahora el primero de ellos.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS

Consideramos en este apartado las ecuaciones diferenciales de la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

7 Soluciones

Comenzaremos observando que cualquier combinación lineal de dos soluciones de la ecuación homogénea, es también solución. En efecto, si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

la función $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ lo es también (para comprobarlo basta derivar $y(x)$ y sustituir en la ecuación).

El hecho de que en la función $y(x)$ así construida estemos incluyendo dos constantes C_1 y C_2 , debe hacernos pensar que si sabemos encontrar $y_1(x)$ e $y_2(x)$ tendremos ya la solución general de la homogénea: estamos incluyendo los dos grados de libertad que debe presentar toda solución general de una ecuación lineal de segundo orden. Por supuesto, esto será así siempre que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ no sean proporcionales, es decir siempre que sean linealmente independientes.

Definición (Funciones linealmente independientes).- El conjunto de funciones

$$\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$$

son linealmente independientes en el intervalo $[a, b]$, si la ecuación

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0$$

admite como única solución $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ en $[a, b]$.

Definición (Sistema fundamental de soluciones).- La pareja de soluciones $\{y_1(x), y_2(x)\}$, forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, en (a, b) si son linealmente independientes en (a, b) .

En el caso de dos funciones, $\{y_1(x), y_2(x)\}$, serán linealmente dependientes si existe una constante k tal que $y_1(x) = k y_2(x)$ y linealmente independientes si el cociente $y_1(x) / y_2(x)$ es una función no constante de x . En la práctica es frecuente estudiar la dependencia lineal a través del Wronskiano.

Definición (Wronskiano de un conjunto de funciones).- Se llama Wronskiano del conjunto de funciones $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ al determinante funcional:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

TEOREMA (Propiedad del Wronskiano de soluciones).- Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones de la ecuación homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ en el intervalo (a, b) , siendo $p(x)$ y $q(x)$ continuas en (a, b) . Estas soluciones son linealmente dependientes si y solo si el wronskiano es idénticamente nulo en (a, b) y son linealmente independientes si y solo si $W(y_1, y_2) \neq 0$ para todo x en (a, b) .

TEOREMA (Solución general de la e. d. lineal homogénea de segundo orden).- Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ en el intervalo (a, b) , siendo $p(x)$ y $q(x)$ continuas en (a, b) . Entonces la solución general de esa ecuación en (a, b) es $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$

Esto significa que el problema de encontrar la solución general de una ecuación lineal homogénea de segundo orden está resuelto si se han encontrado dos soluciones no proporcionales. Los resultados de los teoremas anteriores, son generalizables al caso de una ecuación lineal homogénea de orden n .

8 Reducción de orden

Por reducción de orden entendemos el proceso por el cual, dada una solución $y_1(x)$ de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

se encuentra otra solución $y_2(x)$, de manera que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son independientes. En lo que sigue, supondremos que las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son continuas.

Si $y_1(x)$ es una solución de una ecuación lineal homogénea de orden 2, entonces la sustitución

$$y_2(x) = v(x)y_1(x)$$

la reduce a una de primer orden. Descripción del método:

1. Se escribe $y_2(x) = v(x)y_1(x)$, siendo el objetivo encontrar $v(x)$.
2. Se deriva dos veces $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ y se impone que se verifique la ecuación homogénea: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$
3. Se agrupan los términos en $v''(x)$ (sólo hay uno), en $v'(x)$ y en $v(x)$.

4. El término en $v(x)$ debe anularse por ser $y_1(x)$ solución, luego resulta una ecuación de primer orden¹ en $v'(x)$, de la cual se obtiene esta función.
5. Se integra $v'(x)$ para encontrar $v(x)$ y con ella la solución $y_2(x)$ requerida.

ECUACIONES DIFERENCIALES NO HOMOGÉNEAS DE SEGUNDO ORDEN

Como ya hemos visto, son ecuaciones de la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

En esta sección describiremos el método de variación de constantes para determinar una solución particular de esta ecuación. Previamente se puede aplicar el principio de superposición para desglosar la resolución de una ecuación de este tipo en procesos más sencillos.

9 Principio de superposición

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN.- Si $y_1(x)$ es solución de

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r_1(x)$$

e $y_2(x)$ es solución de

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r_2(x)$$

entonces $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ es solución de

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = \alpha_1 r_1(x) + \alpha_2 r_2(x)$$

10 Método de variación de constantes

Con este método podremos encontrar una solución particular para una ecuación lineal no homogénea, siempre que se conozca el sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada.

- La idea, que da nombre al método, es sustituir las constantes de la familia solución general de la homogénea $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ por funciones, para hallar una solución particular de la forma $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$
- Puesto que deben hallarse dos incógnitas, necesitaremos una condición añadida, que además permita simplificar los cálculos; esta condición es

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \quad (1)$$

- El primer paso del desarrollo del método consiste en derivar dos veces $y_p(x)$ e imponer que verifique la ecuación: $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$; de ahí se obtendrá la ecuación en $C_1'(x)$ y $C_2'(x)$ siguiente

¹De aquí el nombre del método: para encontrar la solución de una de segundo se resuelve una de primer orden.

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = r(x) \quad (2)$$

- Después, se resuelve el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) en las incógnitas $C_1'(x)$ y $C_2'(x)$; este sistema siempre tiene solución única puesto que las soluciones y_1 e y_2 son no proporcionales.
- Por último se integran $C_1'(x)$ y $C_2'(x)$ para obtener la solución $y_p(x)$ buscada.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE COEFICIENTES CONSTANTES DE ORDEN 2

Estas ecuaciones son un caso particular de las de coeficientes variables, sin embargo, tienen su propio método de resolución, tanto para obtener la ecuación general de la homogénea asociada, como para localizar una solución particular de la completa.

11 Ecuaciones lineales de coeficientes constantes homogéneas

La forma general de las ecuaciones de este tipo es

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0 \quad (3)$$

Definición (Ecuación característica).- Se llama ecuación característica de la ecuación $y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$, a la ecuación algebraica asociada: $r^2 + pr + q = 0$

Conociendo las raíces de esta ecuación podemos formar la solución general de (3). Según que $p^2 - 4q$ sea positivo, nulo o negativo, nos encontraremos con tres situaciones diferentes:

CASO 1.- La ecuación característica tiene dos raíces reales distintas, r_1 y r_2 :

Entonces el sistema fundamental de soluciones es $y_1(x) = e^{r_1x}$, $y_2(x) = e^{r_2x}$

y la solución general será: $y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

CASO 2.- La ecuación característica tiene una raíz real doble, r :

Entonces el sistema fundamental de soluciones ² es $y_1(x) = e^{rx}$, $y_2(x) = xe^{rx}$

y la solución general será: $y(x) = e^{rx}(C_1 + C_2x)$

CASO 3.- La ecuación característica tiene dos raíces complejas conjugadas, $r_1 = a + bi$ y $r_2 = a - bi$:

Entonces el sistema fundamental de soluciones es:

²La segunda solución se encuentra por el método de reducción de orden.

$$y_1(x) = e^{ax} \cos bx, \quad y_2(x) = e^{ax} \operatorname{sen} bx$$

y la solución general será: $y(x) = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \operatorname{sen} bx)$

12 Ecuaciones lineales de coeficientes constantes no homogéneas

La forma general de las ecuaciones de este tipo es

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = r(x)$$

Sabemos que la solución de esta ecuación se obtiene mediante la suma $y_p + y_h$ donde y_h es la solución general de la homogénea asociada, que ya podemos calcular, e y_p es una solución particular de la completa. Esta solución particular puede calcularse a partir de la general de la homogénea, por el método de coeficientes indeterminados o por el método de variación de constantes descrito en el apartado de las ecuaciones lineales de coeficientes variables.

MÉTODO DE COEFICIENTE INDETERMINADOS

Este método se aplica únicamente cuando los coeficientes son constantes; su utilización permite construir una solución particular de la ecuación

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = r(x)$$

cuando $r(x)$ es combinación lineal o producto de funciones polinómicas, exponenciales, cosenos y senos.

La idea del método es buscar una solución particular del mismo tipo que el término $r(x)$, puesto que la parte izquierda de la ecuación es únicamente una combinación lineal de $y(x)$ y sus derivadas.

Es imprescindible haber resuelto la ecuación característica de la homogénea asociada y disponer ya del sistema fundamental de soluciones de esa ecuación.

El primer paso del método es el diseño de una propuesta de solución particular, $y_p(x)$, del mismo tipo que la función $r(x)$ (Ver cuadro). Esta función $y_p(x)$ dependerá de unos coeficientes aún por determinar³.

El segundo paso es el cálculo de esos coeficientes, para lo cual hay que derivar dos veces $y_p(x)$ e imponer que cumpla la ecuación; se obtendrá un sistema lineal de ecuaciones de la misma dimensión que el número de coeficientes a determinar.

En el diseño de $y_p(x)$ es muy importante tener en cuenta que no debe contener ningún sumando que sea solución de la homogénea asociada.

En virtud del principio de superposición, a una suma de funciones $r(x)$ de las del cuadro, le corresponderá una suma de las soluciones propuestas para cada sumando.

³De aquí el nombre de este método.

Lo mismo puede indicarse si el segundo término de la ecuación es producto de funciones $r(x)$ de las del cuadro, teniendo en cuenta que habrá que añadir un único factor x^s .

$r(x)$	$y_p(x)$
ae^{kx}	$Ax^s e^{kx}$
$b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$	$x^s(B_0 + B_1x + \dots + B_mx^m)$
$a_0 \cos kx + a_1 \operatorname{sen} kx$	$x^s(A_0 \cos kx + A_1 \operatorname{sen} kx)$
en todos los casos s es el menor entero no negativo tal que ningún sumando de $y_p(x)$ sea solución de la homogénea asociada.	

Cuadro 1.- Diferentes soluciones particulares según diferentes valores de $r(x)$.

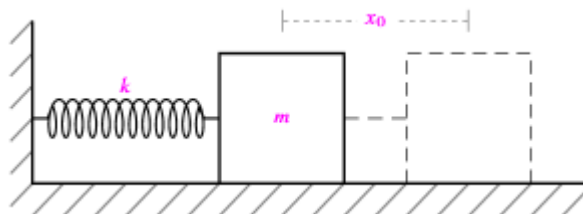
Hemos visto que en el caso de las ecuaciones de coeficientes constantes la búsqueda de la solución particular puede hacerse por dos métodos: la ventaja del de variación de constantes respecto al de coeficientes indeterminados es que no restringe el tipo de $r(x)$; su desventaja es que conlleva integración, lo que en muchos casos complica su aplicación respecto al de coeficientes indeterminados, en el que no se calculan primitivas.

APLICACIONES: VIBRACIONES EN SISTEMAS MECÁNICOS

Una masa m está sujeta a una pared mediante un resorte o muelle. Este muelle ejerce sobre el objeto una fuerza de recuperación, F_m . Las vibraciones del objeto se producen a consecuencia de la pérdida del equilibrio del sistema; las fuerzas presentes en el sistema tenderán a recuperar el equilibrio. Dependiendo de cuáles sean esas fuerzas se presentan distintos casos.

13 Vibraciones armónicas simples no amortiguadas

Supongamos que la superficie es lo suficientemente lisa como para despreciar la fuerza de rozamiento.



La única fuerza presente en el sistema es la del muelle⁴: $F_m = -k x(t)$ donde k es una constante positiva que depende de la rigidez del muelle.

⁴ La fuerza que actúa sobre un objeto causada por un resorte tiene una magnitud proporcional a la elongación del resorte a partir de su longitud natural y de sentido opuesto a la elongación (ley de Hooke)

La segunda ley de Newton establece que la fuerza total que actúa sobre un cuerpo es igual al producto de su masa por su aceleración, esto es

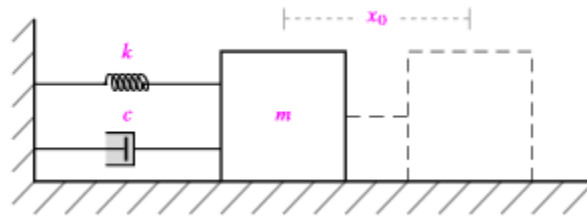
$$m x''(t) = F_m$$

El problema de valor inicial que modela las vibraciones del objeto es

$$x''(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0$$

14 Vibraciones armónicas amortiguadas

En el sistema anterior consideremos que se agrega un sistema mecánico (amortiguador) que tiene el efecto de reducir la velocidad cuando el sistema se encuentra vibrando. El amortiguador ejerce una fuerza dependiendo de la velocidad de la masa.



Por simplicidad supongamos que esta fuerza en magnitud es proporcional a la rapidez, entonces la fuerza que ejerce el amortiguador es

$$F_c = -c \cdot x'(t) \quad (c > 0)$$

Observad que el signo negativo indica que la fuerza de amortiguación va en sentido contrario a la del cuerpo. La fuerza total ejercida por la masa es $F_m + F_c$.

La ecuación para este sistema⁵ es

$$m x''(t) + c x'(t) + k x(t) = 0$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial es

$$m r^2 + c r + k = 0$$

Las dos soluciones de esta ecuación son:

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

El signo del radicando $c^2 - 4mk$ determina el tipo de movimiento del sistema:

1. Movimiento sobreamortiguado $c^2 - 4mk > 0$. En este caso

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Las dos funciones exponenciales son decrecientes y el sistema tiende rápidamente a su posición de equilibrio.

⁵ La misma ecuación diferencial modela el sistema masa-resorte colocado verticalmente

2. Movimiento críticamente amortiguado $c = \sqrt{4mk}$. En este caso

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{c}{2m}t}$$

La función posición contiene un término exponencial decreciente multiplicada por una función lineal en el tiempo. Se espera que la posición decrezca hacia la posición de equilibrio sin vibrar, la manera en la que lo haga dependerá de las condiciones iniciales.

3. Movimiento subamortiguado $c^2 - 4mk < 0$. En este caso

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \left(c_1 \cos \left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} t \right) + c_2 \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} t \right) \right)$$

El sistema oscilará alrededor de la posición de equilibrio. Como el factor exponencial es decreciente, se espera que la amplitud de vibración sea cada vez más pequeña.

15 Vibraciones forzadas

Además de las fuerzas de recuperación y de rozamiento sobre el sistema puede actuar una fuerza externa dada por $F_e = f(t)$. Se tendrá entonces

$$m x''(t) = F_m + F_c + F_e$$

es decir,

$$m x''(t) + c x'(t) + k x(t) = f(t)$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE COEFICIENTES CONSTANTES HOMOGÉNEAS DE ORDEN N

16 Soluciones

En general, para una ecuación lineal de orden n de la forma

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

la ecuación característica, es la siguiente ecuación de grado n :

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

Además, la solución general de la ecuación se escribe como una combinación lineal de n soluciones linealmente independientes, es decir, en base a un sistema fundamental de n soluciones. Generalizando lo expuesto para orden 2, veamos qué relación guardan las raíces de la ecuación característica con las n soluciones que forman el sistema fundamental:

1. A cada raíz real r de multiplicidad s , le corresponden las soluciones independientes

$$e^{rx}, x e^{rx}, x^2 e^{rx}, \dots, x^{s-1} e^{rx}$$

2. A cada par de raíces complejas conjugadas $a \pm bi$ de multiplicidad s , le corresponden las soluciones independientes

$$e^{ax} \cos bx, e^{ax} \operatorname{sen} bx, xe^{ax} \cos bx, xe^{ax} \operatorname{sen} bx, \dots, x^{s-1}e^{ax} \cos bx, x^{s-1}e^{ax} \operatorname{sen} bx$$

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

17 Definiciones básicas

Un sistema de orden 2 con condiciones iniciales tiene la forma

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1, x_2) & x_1(t_0) = y_1 \\ x_2'(t) = f_2(t, x_1, x_2) & x_2(t_0) = y_2 \end{cases}$$

En el caso de que f_1 y f_2 sean lineales entonces el sistema se denominará lineal

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + g_1(t) & x_1(t_0) = y_1 \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + g_2(t) & x_2(t_0) = y_2 \end{cases}$$

Matricialmente,

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$$

18 Resolución de sistemas lineales

El método que desarrollaremos para la resolución analítica de un sistema de ecuaciones lineales de coeficientes constantes consiste en eliminar una de las variables junto con su derivada y resolver la ecuación diferencial de segundo orden que resulta del proceso de eliminación. Sustituyendo en el sistema la solución obtenida, se calcula la función que falta.

Denotamos por D la derivación respecto de x , con D^2 la derivación respecto de x dos veces y, en general, por D^n la derivación respecto de x , n veces.

Así,

$$y'' + py' + qy = D^2y + pDy + qy = (D^2 + pD + q)y$$

Este operador permite utilizar técnicas algebraicas en la eliminación.

Por ejemplo, sea el sistema
$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = 4x(t) - 7y(t) \end{cases}$$

Reescribimos el sistema utilizando el operador D

$$\begin{cases} (D - 3)x + 4y = 0 \\ -4x + (D + 7)y = 0 \end{cases}$$

En el sistema algebraico obtenido, se elimina una de las variables. Si multiplicamos la primera ecuación por $(D + 7)$ y la segunda por -4 , se elimina la variable y , obteniéndose la ecuación de segundo orden

$$x''(t) + 4x'(t) - 5x = 0$$

Esta ecuación se resolverá mediante la ecuación característica. Una vez obtenida $y(t)$, se substituye en la primera ecuación del sistema para calcular $y(t)$.

Ejercicios propuestos

1

Halla, mediante eliminación de los parámetros, la e.d.o. de segundo orden cuya solución general es la familia

$$y = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x}$$

Solución: $x^2 y'' - 2y = 0$

2

Utilizar el teorema de existencia para discutir la existencia y unicidad de la solución de los siguientes problemas de valor inicial:

- a)
$$\begin{cases} x^2 y'' + y = \cos x \\ y(1) = y_0, \quad y'(1) = y_1 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} e^x y'' - \frac{1}{x-3} y' + y = \log x \\ y(1) = y_0, \quad y'(1) = y_1 \end{cases}$$

donde y_0 e y_1 son constantes reales.

Solución: a) Tiene solución única definida en $(0, \infty)$; b) Tiene solución única definida en $(0, 3)$.

3

En los siguientes problemas de valor inicial, determinar si se puede aplicar el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones lineales y en caso afirmativo definir el intervalo donde se garantiza la existencia de solución única.

a. $y'' + yy' = x^2 - 1$;
 $y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

b. $(1-x)y'' + xy' - 2y = \sin x$;
 $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

Solución: a) No se puede aplicar el teorema de existencia porque no es un problema lineal; b) La solución es única y está definida en $(-\infty, 1)$

4

a. Demostrar que $y_1(x) = \frac{1}{x}$ e

$y_2(x) = x^3$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $x^2 y'' - xy' - 3y = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$.

b. Probar que son soluciones linealmente independientes en $(0, \infty)$.

c. Escribir la solución general.

Solución: c) $y = C_1 \frac{1}{x} + C_2 x^3$

5

Determinar si las siguientes funciones pueden ser wronskianos en $(-1, 1)$ de dos soluciones de alguna ecuación lineal homogénea de segundo orden con $p(x)$ y $q(x)$ continuas.

a) $w(x) = -3e^{-2x}$ b) $w(x) = x^2$

c) $w(x) = \frac{1}{x+1}$ d) $w(x) = 0$

e) ¿Y la función $w(x) = 3(x-1)^2$ en el intervalo $(0, 2)$?

Solución: a) Sí, b) No, c) Sí, d) Sí, e) No.

6

La expresión

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

se llama familia biparamétrica de curvas porque cada par de valores reales (C_1, C_2) proporciona una curva diferente.

a. Comprueba que todas las curvas de la familia anterior verifican la relación $y'' = y$.

- b. Representa con Matlab, en el intervalo $[-2, 2]$, una muestra de curvas de esa familia y comprueba gráficamente que son cóncavas en el semiplano $y > 0$ y convexas en el semiplano $y < 0$. ¿Presentan puntos de inflexión? Toma para C_1 y C_2 los valores $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
- c. Modifica el programa anterior para que dibuje una muestra de curvas de la familia $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- d. Comprueba que todas las curvas de esta familia son soluciones de $y'' = -y$

7

Partimos de nuevo de la familia de curvas $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ que es la solución general de $y'' = y$, no sólo porque cada una de las curvas es solución de la ecuación (como comprobaste antes), sino también porque para cada par de condiciones iniciales

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \quad \text{existen unos valores}$$

adecuados de C_1 y C_2 de forma que la curva que los lleva cumple esas condiciones.

- a. Representa con Matlab, en el intervalo $[-1, 1]$, una muestra de soluciones de $y'' = y$, primero fijando un punto de paso, $P(0, 2)$, y dejando variar la pendiente y después fijando una pendiente, $y'(0) = 2$, y dejando variar el punto de paso.
- b. Adapta el fichero anterior para que repita el mismo proceso para la familia de curvas $y(x) = e^x(C_1 + C_2 x)$. Para ello debes primero encontrar las fórmulas que dan C_1 y C_2 en función de $y(0)$ e $y'(0)$.
- c. Repite el apartado anterior para la familia de curvas $y(x) = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

8

Los coeficientes de la familia de curvas

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

también pueden ajustarse para que la función pase por dos puntos dados. Éstas son las condiciones de frontera.

- a. Representa, en el intervalo $[0, 2]$, una muestra de cinco curvas de la familia pasando por el punto $P(0, 2)$, es decir

cumpliendo $y(0) = 2$, y luego cinco curvas pasando por $Q(2, 2)$, es decir, cumpliendo que $y(2) = 2$. Adapta ese fichero para que repita el mismo proceso para la familia de curvas

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

y los puntos $P(0, 2)$ y $Q(\pi/2, 1)$. Para ello debes primero encontrar las fórmulas que dan C_1 y C_2 en función de $y(0)$ e $y(\pi/2)$.

9

Sabiendo que la función dada, $y_1(x)$, es solución de la ecuación, encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones:

- a. $(x-1)y'' - xy' + y = 0, \quad y_1(x) = x$
- b. $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad y_1(x) = x$
- c. $x^2y'' + xy' - 4y = 0, \quad y_1(x) = x^2$

Comprueba los resultados con Matlab, utilizando `dsolve`.

Solución: a) $y(x) = C_1 x + C_2 e^x$

b) $y(x) = C_1 x + C_2 x^{-2}$

c) $y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^{-2}$

10

Dada la ecuación diferencial

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = \frac{1}{x}. \quad \text{Se pide}$$

- a. Demostrar que $y_1 = x^2, y_2 = x^3$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea.
- b. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial.

Solución b) $y_1 = \frac{1}{12x} + C_1 x^2 + C_2 x^3$

11

Dada la ecuación diferencial

$$x^2 y'' - xy' + y = 4x \log x. \quad \text{Se pide}$$

- a. Demostrar que $y_1 = x, y_2 = x \log x$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea.
- b. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial.

Solución b) $y_1 = \frac{2}{3} x \cdot \log^3 x + C_1 x + C_2 x \log x$

12

Para la siguiente ecuación, encuentra la solución particular que se obtiene mediante el método de variación de constantes

$$(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 1$$

sabiendo que la solución general de la homogénea asociada es

$$y_h(x) = C_1x + C_2(1 + x^2)$$

Comprueba los resultados con Matlab, utilizando `dsolve`.

Solución:

$$y_p(x) = -x^2 + x \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + \frac{x^2 + 1}{2} \log |x^2 - 1|$$

13

Efectúa el cambio de variable $x = e^t$ para transformar las ecuaciones siguientes en otras de coeficientes constantes y resuelve éstas últimas.

a. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

b. $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^3$

Comprueba los resultados con Matlab, utilizando `dsolve`.

Solución: a) $y(x) = x^2(C_1 + C_2 \log x)$

b) $y(x) = x^3(C_1 + \log x) + C_2x^2$

14

Halla la solución particular de los siguientes problemas de valor inicial

a. $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 3$,
 $y'(0) = 13$

b. $y'' + 6y' + 13y = 0$, $y(0) = 2$,
 $y'(0) = 0$

c. $y'' + y' - 6y = 0$, $y(0) = 7$,
 $y'(0) = -1$

Comprueba los resultados con Matlab, utilizando `dsolve`.

Solución: a) $y(x) = e^{5x}(3 - 2x)$

b) $y(x) = e^{-3x}(2 \cos 2x + 3 \sin 2x)$

c) $y(x) = 4e^{2x} + 3e^{-3x}$

15

Encuentra la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones lineales

a. $y'' + y' = -1/x$

b. $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x} \cos x$

c. $y'' - y = (e^x + 1)^{-1}$

d. $y'' + y = 2x \sin x$

Comprueba los resultados con Matlab, utilizando `dsolve`.

Solución:

a) $y(x) = C_1 + C_2e^{-x} - \log x + e^{-x} \int \frac{e^x}{x} dx$

b) $y(x) = e^{-x}[C_1 + C_2x + 4x \sin x + (6 - x^2) \cos x]$

c) $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \log(e^x + 1) - \frac{1}{2}(xe^x + 1)$

d) $+ \frac{x}{2} \sin x - \frac{x^2}{2} \cos x + \frac{x}{2} \sin x - \frac{x^2}{2} \cos x$

16

Halla la solución general de la siguiente ecuación, utilizando el método de coeficientes indeterminados para encontrar una particular de la ecuación completa

$$y'' + 9y = \sin^4 x$$

Nota: Debes escribir $\sin^4 x$ como combinación de cosenos.

Solución:

$$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{24} - \frac{1}{10} \cos 2x - \frac{1}{56} \cos 4x$$

17

Considerar una masa de 10 Kg. Que está unida a una pared una distancia de 0.02 m. y se suelta a partir del reposo, determinar la posición y la velocidad de la masa en el tiempo, la frecuencia de oscilación, la amplitud, el ángulo de fase y las energías cinética y potencial en el tiempo t.

El problema que modela esta situación es:

$$10x'' + 10x = 0, \quad x(0) = 0.02, \quad x'(0) = 0.$$

Solución: $x(t) = 0.02 \cos t = 0.02 \sin \left(t + \frac{\pi}{2} \right)$.

$$w = 1 \text{ rad / seg.}, \quad T = 2\pi \text{ seg.}, \quad A = 0.02 \text{ m.}, \quad \text{la}$$

$$\text{frecuencia de oscilación } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \text{ osc/seg}$$

$$\text{(Hertz), el ángulo de fase es } \phi = \frac{\pi}{2},$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 0.002 \text{ sen}^2 t,$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 0.002 \text{ cos}^2 t$$

18

Un resorte cuelga verticalmente de un techo, el resorte sufre una deformación en su longitud de un centímetro cuando se coloca una masa de 1.5 kg y después el sistema queda en equilibrio. Posteriormente se elonga una cantidad de 1.5 cm. y se suelta a partir del reposo. Determinar la constante del resorte, la posición y la velocidad de la masa en el tiempo $t \geq 0$. ¿Cuál es la frecuencia de oscilaciones de la masa y la amplitud del movimiento?

Nota: En la posición de equilibrio, la constante

del resorte es: $k = \frac{mg}{\Delta l}$. Considerando como

origen de coordenadas a la posición de equilibrio y la dirección positiva del eje vertical hacia abajo, entonces, la posición de la masa viene dada por la solución del problema de valor inicial

$$mx'' + kx = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$$

Solución:
$$\begin{aligned} x(t) &= 0.015 \cos(\sqrt{980} t) \\ v(t) &= 0.015\sqrt{980} \text{ sen}(\sqrt{980} t) \end{aligned}$$

$$w = \sqrt{980} \text{ rad / seg}, \quad f = \frac{\sqrt{980}}{2\pi} \approx 4.98$$

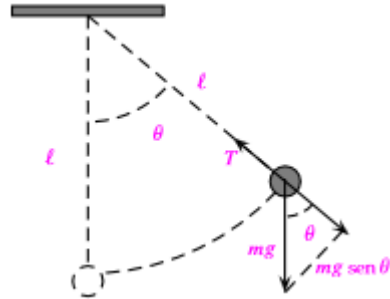
oscilaciones en un segundo. La amplitud es $A = 0.015m$

19

Un péndulo de masa $m = 2kg$ y de longitud 2.45 m. está suspendido sobre un marco horizontal. El péndulo se levanta un ángulo de 10° y se suelta con una velocidad angular de -0.4 rad/seg . Se pide:

- ¿cuántos ciclos (oscilaciones) completos habrá completado el péndulo después de 10 seg.?
- ¿en qué momento la masa pasa por la posición de equilibrio con velocidad angular positiva por tercera vez?
- ¿En qué instantes la masa alcanza sus desplazamientos extremos?

- ¿Cuál es la posición de la masa del péndulo en cualquier tiempo?
- ¿Cuál es la posición de la masa a los 10 seg.?



Nota: La ecuación diferencial del movimiento

es $\theta'' + \frac{g}{l} \text{ sen } \theta = 0$. Suponiendo ángulos

pequeños se puede suponer $\text{sen } \theta \approx \theta$, obteniendo la ecuación diferencial

$$\theta'' + \frac{g}{l} \theta = 0.$$

Solución:

$$\theta(t) = \frac{\pi}{18} \cos 2t - \frac{1}{5} \text{ sen } 2t = A \text{ sen}(wt + \phi)$$

$$\text{siendo } A = \sqrt{\left(\frac{\pi}{18}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2},$$

$$tg\phi = \frac{\pi/18}{-0.2}, \quad \phi \approx 2.4242, \quad w = 2, \quad T = \pi, \text{ en}$$

10 segundos se realizarán $10/\pi \approx 3$ ciclos,

$$\theta(10) \approx -0.01$$

20

Encontrar la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a. } \begin{cases} x' = 3y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} x' + y = t^2 \\ y' - x = 1 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} x' + y' + 2x = 0 \\ x' + y' - x - y = \text{sen } t \end{cases}$$

Solución: e.d.o. $y' = \frac{y-x}{y+x}$;

$$\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + \text{arctg} \frac{y}{x} = C$$

Test de autoevaluación

1

Si en la ecuación $xy'' + y' = 9x^2$ se realiza el cambio de variable $x = e^t$, se obtiene la ecuación:

- A) $y'' = 9e^{3t}$
 B) $y'' = 9e^{2t}$
 C) $y'' + 2y' = 9e^{3t}$
 D) Ninguna de las anteriores.

2

Se considera la ecuación diferencial $y'' - y' = 0$. Justificar cuál de los conjuntos $\{y_1(x), y_2(x)\}$ son un sistema de soluciones linealmente independientes:

- A) $y_1(x) = 0$, $y_2(x) = e^x$
 B) $y_1(x) = xe^x$, $y_2(x) = e^x$
 C) $y_1(x) = 1 + 2e^x$, $y_2(x) = \frac{1}{4}e^x$
 D) Ninguna de las anteriores.

3

Dado el problema de valores en la frontera,

$$y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1$$

podemos afirmar que:

- A) Una solución de este problema es $y = 0$.
 B) Este problema no tiene solución.
 C) Este problema tiene infinitas soluciones.
 D) Ninguna de las anteriores.

4

Dada la ecuación diferencial,

$$y'' + 3y' + 2y = 4x^2$$

podemos afirmar que una ecuación particular es de la forma:

- A) $y_p = Ax^2$
 B) $y_p = x^2e^{-x}$.
 C) $y_p = ax^2 + bx + c$
 D) Ninguna de las anteriores.

1	2	3	4
A	C	B	C

Ejercicios resueltos

1

Encontrar mediante eliminación de las constantes, la ecuación diferencial de la familia $y = C_1x + C_2x^2$

Solución

Derivando la expresión dos veces, se tiene un sistema que nos permite despejar las constantes

$$\left. \begin{array}{l} y' = C_1 + 2C_2x \\ y'' = 2C_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} C_2 = \frac{1}{2}y'' \\ C_1 = y' - y''x \end{array} \right\}$$

Así sustituyendo en la expresión inicial

$$y = (y' - y''x)x + \left(\frac{1}{2}y''\right)x^2 \Rightarrow x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

se obtiene la ecuación diferencial de la cual es solución la familia biparamétrica dada.

2

Demostrar que $y_1(x) = 0$, $y_2(x) = x^2 \operatorname{sen}(x)$ son soluciones de la ecuación $x^2 y'' - 4xy' + (x^2 + 6)y = 0$ y que satisfacen las condiciones $y(0) = y'(0) = 0$. ¿Contradice esto el teorema de existencia y unicidad de la solución? ¿Por qué?

Solución

Es sencillo probar que $y_1(x) = 0$ es solución de la ecuación, así como ver que $y_1(0) = y_1'(0) = 0$.

Para comprobar que $y_2(x) = x^2 \operatorname{sen}(x)$ lo es, basta derivar

$$y_2'(x) = x^2 \cos(x) + 3x \operatorname{sen}(x)$$

$$y_2''(x) = 4x \cos(x) + (2 - x^3) \operatorname{sen}(x)$$

y sustituir y_2, y_2', y_2'' en $x^2 y'' - 4xy' + (x^2 + 6)y = 0$ para ver que se anula. Fácilmente se obtiene que $y_2'(0) = y_2''(0) = 0$.

Para poder aplicar el teorema de existencia y unicidad, escribimos la ecuación de la forma.

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \left(1 + \frac{6}{x^2}\right)y = 0$$

Observando esta expresión, se deduce que el teorema no puede aplicarse porque $p(x) = \frac{-4}{x}$ y $q(x) = 1 + \frac{6}{x^2}$ no están definidas para $x=0$. Por lo tanto, no hay contradicción en la existencia de dos solucionjes pasando por el mismo punto con la misma pendiente en ese punto.

3

Determinar si la familia $y = C_1 x + C_2 x^2$ es solución general de la ecuación $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ en cualquier intervalo que no contenga al cero.

Solución

Para que una combinación lineal de $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x^2$ sea la solución general de la ecuación diferencial se tendrá que demostrar que son soluciones linealmente independientes.

- Soluciones. Se puede comprobar fácilmente que $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x^2$ verifican la ecuación, es decir, se cumple:

$$x^2 y_1'' - 2xy_1' + 2y_1 = 0 \quad x^2 y_2'' - 2xy_2' + 2y_2 = 0$$

- Linealmente independientes. Calculando el wronskiano

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2 \neq 0 \text{ para todo } x \in [a, b], 0 \notin [a, b]$$

se deduce que y son linealmente independientes en cualquier intervalo que no contenga al cero.

Constituyen por tanto un sistema fundamental de soluciones.

4

Encontrar la solución general de la ecuación $x^2 y'' - (x+2)xy' + (x+2)y = 0$ sabiendo que $y_1(x) = x$ es solución de la misma.

Solución

Se debe buscar una solución independiente con $y_1(x)$ de la forma $y_2(x) = v(x)y_1(x)$. Derivando e imponiendo que $y_2(x)$ verifique la ecuación, se obtiene la expresión

$$x^2(vy_1'' + 2v'y_1' + v''y_1) - (x+2)x(vy_1' + v'y_1) + (x+2)vy_1 = 0$$

donde se ha omitido, para mayor claridad, la dependencia de la x en las distintas funciones.

Agrupando los términos en v , v' y v''

$$v''(x^2y_1) + v'(2x^2y_1' - x(x+2)y_1) + v(x^2y_1'' - (x+2)xy_1' + (x+2)y_1) = 0$$

De esta forma observamos que el coeficiente en v es nulo por ser $y_1(x)$ solución de la ecuación $x^2 y'' - (x+2)xy' + (x+2)y = 0$.

La expresión se reduce a

$$v''x^3 + v'(2x^2 - x^2(x+2)) = 0 \quad \Rightarrow \quad v'' - v' = 0$$

que es una ecuación lineal de primer orden, cuya función incógnita es $v'(x)$. Resolviendo esta última ecuación, sabemos que

$$v'(x) = ke^x \quad \Rightarrow \quad v(x) = Ke^x + C$$

De esta expresión se puede obtener la forma general de $y_2(x)$,

$$y_2(x) = Kxe^x + Cx$$

Dado que basta encontrar una función independiente con $y_1(x)$, se hará $K=1$ y $C=0$ para concluir que podemos tomar como expresión de la solución general de la ecuación

$$y(x) = C_1x + C_2xe^x$$

5

Conociendo las raíces de sus ecuaciones características, formar las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas correspondientes.

$$(a) r_1 = 1, r_2 = 2 \quad (b) r_1 = 1 = r_2 \quad (c) r_1 = 3 - 2i \quad r_2 = 3 + 2i$$

Solución

(a) Ecuación característica: $r^2 - 3r + 2 = 0$

Ecuación diferencial: $y'' - 3y' + 2y = 0$

(b) Ecuación característica: $r^2 - 2r + 1 = 0$

T5 ■ ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN Y SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

Ecuación diferencial: $y'' - 2y' + y = 0$

(c) Ecuación característica: $r^2 - 6r + 13 = 0$

Ecuación diferencial: $y'' - 6y' + 13y = 0$

6

Encontrar la solución de la ecuación $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ para la cual $y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$

Solución

Para encontrar la solución pedida, se calculan las raíces de la ecuación característica

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \Rightarrow (r - 1)^3 = 0$$

La raíz es $r=1$ con multiplicidad 3, luego tres soluciones independientes son $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ y la solución general es

$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$$

De todas las soluciones de la familia biparamétrica, se deben encontrar las que verifican las tres condiciones pedidas.

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 1 \Rightarrow y(x) = e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$$

Derivando

$$y'(x) = (1 + C_2)e^x + (C_2 + 2C_3)xe^x + C_3x^2e^x$$

Como

$$y'(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 1 \Rightarrow y(x) = e^x + xe^x + C_3x^2e^x$$

Derivando de nuevo

$$y''(x) = (3 + 2C_3)e^x + (1 + 4C_3)xe^x + C_3x^2e^x$$

Imponiendo la última condición, se tiene

$$y''(0) = 3 \Rightarrow C_3 = 0 \Rightarrow y(x) = e^x + xe^x$$

7

Encontrar la solución general de las ecuaciones

(a) $y'' - y' - 6y = 20e^{-2x}$

(b) $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$

(c) $y'' + y = 2\cos x$

(d) $y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12$

Solución

(a) La ecuación característica tiene como raíces -2 y 3 . Esto implica que la forma de la solución particular de la completa es

$$y_p(x) = Axe^{-2x}$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación se tiene

$$\left. \begin{aligned} y_p'(x) &= A(-2x + 1)e^{-2x} \\ y_p''(x) &= A(4x - 4)e^{-2x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y'' - y' - 6y = -5Ae^{-2x} = 20e^{-2x} \Rightarrow A = -4$$

Con lo que la solución general de la completa resulta

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} - 4x e^{-2x}$$

- (b) La ecuación característica es $(r + 5)^2 = 0$. Esto implica que la forma de la solución particular de la completa es

$$y_p(x) = Ax^2 e^{-5x}$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación se tiene

$$\left. \begin{aligned} y_p'(x) &= A(2x - 5x^2)e^{-5x} \\ y_p''(x) &= A(2 - 20x + 25x^2)e^{-5x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y'' + 10y' + 25y = 2Ae^{-5x} = 14e^{-5x} \Rightarrow A = 7$$

Con lo que la solución general de la completa resulta

$$y(x) = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{5x} + 7x^2 e^{-5x}$$

- (c) Las raíces de la ecuación característica son $\pm i$, por lo que se debe buscar una solución de la forma

$$y_p(x) = Ax \cos(x) + Bx \sin(x)$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación se tiene

$$\left. \begin{aligned} y_p'(x) &= (A + Bx) \cos(x) + (B - Ax) \sin(x) \\ y_p''(x) &= (2B + Ax) \cos(x) + (-2A - Bx) \sin(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Tras sustituir y simplificar, se tiene

$$y_p'' + y_p' = 2B \cos x - 2A \sin(x) = 2 \cos(x) \Rightarrow A = 0 \quad B = 1$$

Por lo tanto, $y_p(x) = x \sin(x)$, siendo entonces la solución general de la completa

$$y(x) = x \sin(x) + C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

- (d) La ecuación característica $r^2 - 2r + 5 = 0$, tiene como raíces $1 + 2i$, $1 - 2i$. La forma de la solución general de la homogénea asociada es

$$y_H(x) = e^x (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$$

Por ser el término independiente un polinomio de grado 2, y no ser el 0 raíz de la ecuación característica, para la solución particular de la completa se debe ensayar un polinomio de grado 2

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación completa se tiene

$$\left. \begin{aligned} y_p'(x) &= (A + Bx)\cos(x) + (B - Ax)\sin(x) \\ y_p''(x) &= (2B + Ax)\cos(x) + (-2A - Bx)\sin(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Tras sustituir y simplificar, se tiene

$$\left. \begin{aligned} y_p'(x) &= 2ax + b \\ y_p''(x) &= 2a \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5ax^2 + (-4a + 5b)x + (2a - 2b + 5c) = 25x^2 + 12$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} a &= 5 \\ b &= 4 \\ c &= 2 \end{aligned} \right\}$$

Por lo tanto,

$$y(x) = e^x (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)) + 5x^2 + 4x + 2$$

8

Encontrar la solución general de la ecuación $y'' - y' - 6y = e^{-x}$ hallando la solución particular primero mediante el método de los coeficientes indeterminados y después por variación de parámetros.

Solución

En primer lugar se calculan las raíces de la ecuación característica

$$r^2 - r - 6 = 0 \Rightarrow r_1 = -2 \quad r_2 = 3$$

La solución general de la homogénea asociada es

$$y_H(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$$

COEFICIENTES INDETERMINADOS

Dado que el término independiente es exponencial y que -1 no es raíz de la ecuación característica, se debe buscar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = A e^{-x} \Rightarrow y_p'(x) = -A e^{-x} \Rightarrow y_p''(x) = A e^{-x}$$

que sustituyendo en la ecuación proporciona

$$e^{-x} (A + A - 6A) = e^{-x} \Rightarrow A = -\frac{1}{4} \Rightarrow y_p = \frac{-1}{4} e^{-x}$$

VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Se considera $y_p(x) = c_1(x)e^{-2x} + c_2(x)e^{3x}$, derivando

$$y_p'(x) = c_1'(x)e^{-2x} + c_2'(x)e^{3x} - 2c_1(x)e^{-2x} + 3c_2(x)e^{3x}$$

Antes de volver a derivar hay que simplificar la primera derivada teniendo en cuenta la condición adicional de que

$$c_1'(x)e^{-2x} + c_2'(x)e^{3x} = 0$$

Luego

$$y_p'(x) = -2c_1(x)e^{-2x} + 3c_2(x)e^{3x}$$

Derivando otra vez

$$y_p''(x) = -2c_1'(x)e^{-2x} + 3c_2'(x)e^{3x} + 4c_1(x)e^{-2x} + 9c_2(x)e^{3x}$$

y sustituyendo en la ecuación se tiene

$$-2c_1'(x)e^{-2x} + 3c_2'(x)e^{3x} = e^{-x}$$

Por lo tanto, las funciones incógnitas se obtienen del sistema

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x)e^{-2x} + c_2'(x)e^{3x} &= 0 \\ -2c_1'(x)e^{-2x} + 3c_2'(x)e^{3x} &= e^{-x} \end{aligned} \right\}$$

de donde

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ e^{-x} & 3e^x \end{vmatrix}}{5e^x} = \frac{-e^x}{5} \quad c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & e^{-x} \end{vmatrix}}{5e^x} = \frac{e^{-4x}}{5}$$

con lo que

$$c_1(x) = \frac{-e^x}{5} \quad c_2(x) = -\frac{e^{-4x}}{20}$$

$$y_p(x) = \frac{-e^x}{5}e^{-2x} - \frac{e^{-4x}}{20}e^{3x} = \frac{-1}{4}e^{-x}$$

La solución general de la completa es

$$y(x) = \frac{-1}{4}e^{-x} + C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$$

$$y(x) = e^x (C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x)) + 5x^2 + 4x + 2$$

9

Encontrar la solución particular de la ecuación $y'' + 4y = \operatorname{tg}(x)$.

Solución

Las raíces de la ecuación característica son $\pm 2i$, por lo que se busca una solución particular de la forma

$$y_p(x) = c_1(x) \cos(2x) + c_2(x) \operatorname{sen}(2x)$$

Derivando y teniendo en cuenta la condición adicional

$$c_1'(x) \cos(2x) + c_2'(x) \operatorname{sen}(2x) = 0$$

se tiene

$$y_p'(x) = c_1'(x) \cos(2x) + c_2'(x) \operatorname{sen}(2x) - 2c_1(x) \operatorname{sen}(2x) + 2c_2(x) \cos(2x) \Rightarrow$$

$$y_p'(x) = -2c_1(x)\operatorname{sen}(2x) + 2c_2(x)\cos(2x)$$

Derivando de nuevo

$$y_p''(x) = -2c_1'(x)\operatorname{sen}(2x) + 2c_2'(x)\cos(2x) - 4c_1(x)\cos(2x) - 4c_2(x)\operatorname{sen}(2x)$$

Sustituyendo en la ecuación

$$y_p''(x) + 4y_p(x) = -2c_1'(x)\operatorname{sen}(2x) + 2c_2'(x)\cos(2x) = \operatorname{tg}(2x)$$

El sistema que hay que resolver es

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x)\cos(2x) + c_2'(x)\operatorname{sen}(2x) &= 0 \\ -2c_1'(x)\operatorname{sen}(2x) + 2c_2'(x)\cos(2x) &= \operatorname{tg}(2x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} c_1'(x) &= \frac{-1}{2}\operatorname{tg}(2x)\operatorname{sen}(2x) \\ c_2'(x) &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) \end{aligned} \right\}$$

Integrando

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \frac{-1}{2} \int \operatorname{tg}(2x)\operatorname{sen}(2x) dx = \frac{-1}{2} \int \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{\cos(2x)} dx = \frac{-1}{2} \int \frac{1 - \cos^2(2x)}{\cos(2x)} dx = \\ &= \frac{-1}{2} \int \left(\frac{1}{\cos(2x)} - \cos(2x) \right) dx = \frac{-1}{2} \left(\log \left| \frac{1 + \operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) \right) \end{aligned}$$

$$c_2(x) = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(2x) dx = \frac{-1}{4} \cos(2x)$$

Finalmente resulta

$$y_p(x) = c_1(x)\cos(2x) + c_2(x)\operatorname{sen}(2x) = \frac{-1}{4} \cos(2x) \left[\log(\sec(2x) + \operatorname{tg}(2x)) \right]$$

10

Encontrar la solución general para la siguiente ecuación

$$(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2$$

Solución

En primer lugar se encuentra la solución general de la ecuación homogénea asociada. Puede observarse que la función $y_1(x) = x$ es solución de esta ecuación. Se recurrirá a la reducción de orden para encontrar otra independiente con ella. Se considera

$$y_2(x) = xv(x) \Rightarrow y_2'(x) = xv'(x) + v(x) \quad y_2'' = 2v'(x) + xv''(x)$$

Por lo tanto,

$$\frac{v''}{v'} = \frac{2}{x(x^2 - 1)} \Rightarrow v(x) = K \left(x + \frac{1}{x} + C \right)$$

de donde

$$y_2(x) = x^2 + 1 \Rightarrow y_H(x) = c_1x + c_2(x^2 + 1)$$

Una vez obtenida esta solución general de la homogénea, se buscará una particular de la completa. Se hará mediante variación de parámetros:

$$y_p(x) = c_1(x)x + c_2(x)(x^2 + 1) \text{ con } c_1'(x)x + c_2'(x)(x^2 + 1) = 0$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación,

$$\left. \begin{array}{l} y_p'(x) = c_1(x)x + 2xc_2(x) \\ y_p''(x) = c_1'(x) + 2xc_2'(x) \end{array} \right\} \Rightarrow c_1'(x) + 2xc_2'(x) = x^2 - 1$$

Así, se dispone del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas siguiente

$$\left. \begin{array}{l} c_1'(x) + 2xc_2'(x) = x^2 - 1 \\ c_1'(x)x + c_2'(x)(x^2 + 1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c_1'(x) = -x^2 - 1 \\ c_2'(x) = x \end{array} \right\}$$

Integrando se tiene

$$\left. \begin{array}{l} c_1(x) = -\frac{x^3}{3} - x \\ c_2(x) = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow y_p(x) = \frac{x^2}{6}(x^2 - 3)$$

Retomando la solución general de la homogénea, se concluye finalmente que la solución general de la completa es

$$y(x) = c_1x + c_2(x^2 - 1) + \frac{x^2}{6}(x^2 - 3)$$

Puedes ver más ejercicios resueltos sobre ecuaciones diferenciales de segundo orden en la página de Giematic UC

<http://www.giematic.unican.es/index.php/edos-segundo-orden/material-interactivo>