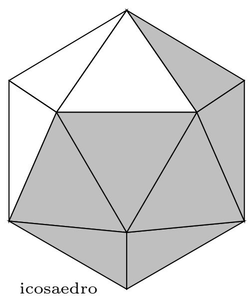
MATEMÁTICAS II

MATEMÁTICAS II

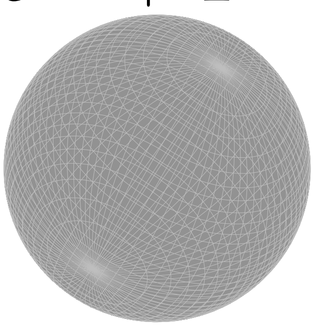
MATEMÁTICAS II

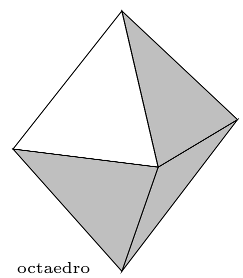
SELECTIVIDAD MURCIA



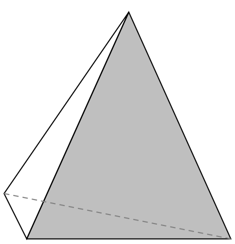
icosaedro

$$e^{\pi\, i} + 1 = 0$$

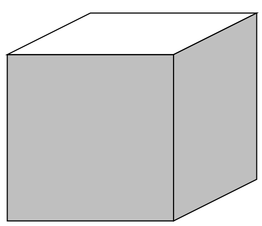




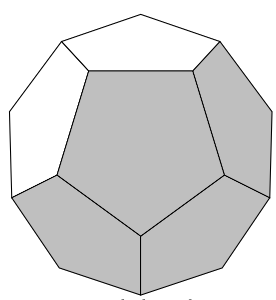
octaedro



tetraedro



cubo



dodecaedro

12 de noviembre de 2020

Germán Ibáñez

http://www.otrapagina.com/matematicas

Índice general

Selectividad Matemáticas II (Murcia) 1

Año 2020

1.1. Septiembre 2020

- CUESTIÓN 1

  Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

  $$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ x-ay+a^2z=-1 \\ -ax+a^2y-a^3z=2 \end{array}\right.$$

  a) Compruebe que el sistema nunca tiene solución única.

  b) Determine para qué valores de a el sistema tiene infinitas soluciones.

  c) Si es posible, resuélvalo para el valor de $a=2$.

  selcn Sep 2020 Solución:

  Primero estudiamos el sistema, para ello hacemos el determinante de la matriz de coeficientes:

  $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & a^2 \\ -a & a^2 & -a^3 \end{vmatrix} = 0$ observamos que la tercera fila es la segunda multiplicada por $-a$ por tanto:

  a) El rango de la matriz de coeficientes para todo a es menor que el número de incógnitas luego nunca será compatible determinado, nunca tiene solución única.

  Consideramos el menor formado de la matriz ampliada:

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & -1 \\ -a & a^2 & 2 \end{vmatrix} = a^2-a-2$ que se anula para $a=-1$ y $a=2$

  Por tanto para $a \neq -1, a \neq 2, \quad rango(M) < rango(A) = 3$ sistema incompatible, sin solución.

  Para $a=-1$ la matriz ampliada queda:

  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, eliminamos la tercera ecuación que es igual que la primera, queda la matriz:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ en la que el menor de la ampliada $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

Para $a = -1$, $\quad rango(M) = 1 < rango(A) = 2$ sistema incompatible, sin solución.

Para $a = 2$ la matriz ampliada queda:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$, eliminamos la tercera ecuación (es igual que la segunda por -2), queda la matriz:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

en la que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$

b) Para $a = 2$, $\quad rango(M) = 2 = rango(A) < 3 =$ número de incógnitas, sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones dependientes de un parámetro.

c) Vamos a resolver, el sistema queda:

$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y + 4z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 2 - z \\ x - 2y = -1 - 4z \end{cases}$

Restando $3y = 3 + 3z$; $\quad y = 1 + z$ sustituyendo en la primera $x + 1 + z = 2 - z$; $\quad x = 1 - 2z$

Por tanto para $a = 2$ la solución es $x = 1 - 2t$, $\quad y = 1 + t$, $\quad z = t$; $\quad t \in R$

- CUESTIÓN 2

  Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

  a) Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4, A^5 y A^6.

  b) Calcule A^{2020}.

  c) Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.

selcn Sep 2020 Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$

$A^4 = A^3 \cdot A = -I_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -A$

$A^5 = A^3 \cdot A^2 = -I_2 \cdot A^2 = -A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^6 = A^3 \cdot A^3 = -I_2 \cdot (-I_2) = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Haciendo la división entera $2020 = 336 \cdot 6 + 4$, por tanto:

$A^{2020} = A^{336 \cdot 6 + 4} = A^{336 \cdot 6} \cdot A^4 = \left(A^6\right)^{336} \cdot A^4 = I_2 \cdot A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -A$

c) A tiene inversa pues su determinante es $|A| = 1$ distinto de 0.

La inversa es la adjunta de la traspuesta dividida por el determinante:

Hallamos $A^{-1}; |A| = 1;\quad A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};\quad adj(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

- CUESTIÓN 3

  Calcule los siguientes límites:

  a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(3+x)-\ln(3-x)}{2x}$

  b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)$

  selcn Sep 2020 Solución:

  a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(3+x)-\ln(3-x)}{2x} = \dfrac{0/0}{\text{L'Hôpital}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{3+x}-\frac{-1}{3-x}}{2} = \dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{2} = \dfrac{\frac{2}{3}}{2} = \dfrac{1}{3}$

  b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right) = \infty - \infty =$

  $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} =$ suma por diferencia es diferencia de cuadrados $=$

  $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x+2}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1-(x+2)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = 0$

- CUESTIÓN 4

  a) Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx$

  b) Calcule la integral definida $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$

  selcn Sep 2020 Solución:

  a) $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln(1+x^2); & du = \dfrac{2x}{1+x^2}\,dx \\ dv = dx; & v = x \end{array} \right\} = x\ln(1+x^2) - \int \dfrac{2x^2}{1+x^2}\,dx =$ dividiendo: cociente = 2 resto = -2 $=$

  $x\ln(1+x^2) - \displaystyle\int \left(2 - \dfrac{2}{1+x^2}\right) dx = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\,ar\tan x + C$

  b) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx = \left[x\ln(1+x^2) - 2x + 2\,ar\tan x\right]_0^1 = \ln 2 - 2 + 2\,ar\tan 1 - 0 = \ln 2 - 2 + 2\frac{\pi}{4} = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$

- CUESTIÓN 5

  Considere los puntos $P = (5,6,1)$ y $Q = (-3,-2,5)$, y la recta

  $r: \quad \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{4}$

  a) Determine el punto R de la recta r para el cual el área del triángulo PQR es $18\sqrt{2}$ unidades cuadradas.

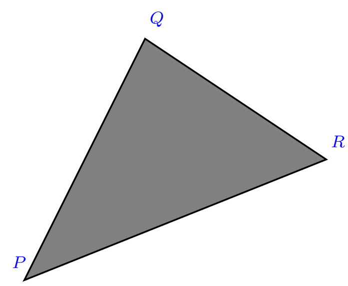
(Observación: hay dos puntos R que son solución del apartado a); basta con encontrar uno de ellos.)

b) Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q y compruebe que dicha recta corta perpendicularmente a la recta r.

selcn Sep 2020 Solución:

a) Ponemos la recta en paramétricas

$r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 4t \end{cases} \quad t \in R$



un punto R de r es de la forma $(t, 1 + t, -1 + 4t)$

El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\vec{QP} = (8, 8, -4)$, $\vec{QR} = (t + 3, 1 + t + 2, -1 + 4t - 5) = (t + 3, t + 3, 4t - 6)$

$\vec{QP} \wedge \vec{QR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 8 & -4 \\ t+3 & t+3 & 4t-6 \end{vmatrix} = (36t - 36)\vec{i} + (-36t + 36)\vec{j} = 36\left((t-1)\vec{i} + (-t+1)\vec{j}\right)$

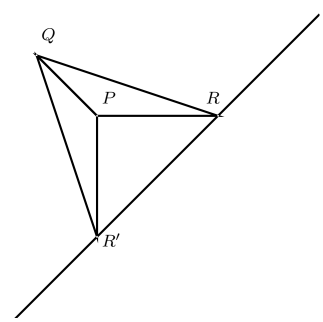
El módulo es:

$|\vec{QP} \wedge \vec{QR}| = 36\sqrt{(t-1)^2 + (-t+1)^2} = 36\sqrt{(t-1)^2 + (-t+1)^2} = 36\sqrt{2(t-1)^2} = 36\sqrt{2}\,(t-1)$

La mitad es: $18\sqrt{2}\,(t-1)$ como ha de ser igual a $18\sqrt{2}$; queda $t - 1 = 1$; $t = 2$, el punto de la recta es sustituyendo en las paramétricas:

$r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 7 \end{cases} \quad R(2, 3, 7)$

b) De la recta que pasa por P y por Q tomamos el punto $P = (5, 6, 1)$ y el vector dirección $\vec{QP} = (8, 8, -4)$ mejor el vector $(2, 2, -1)$, es por tanto $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$



Comprobamos que es perpendicular a r con el producto escalar de los vectores dirección $(1, 1, 4) \cdot (2, 2, -1) = 2 + 2 - 4 = 0$, efectivamente son perpendiculares.

nota: El otro punto de r que forma triángulo de igual área proviene de resolver con más cuidado la ecuación

$\frac{1}{2}36\sqrt{2(t-1)^2} = 18\sqrt{2}$; $\sqrt{(t-1)^2} = 1$; $(t-1)^2 = 1$; $t^2 - 2t = 0$;

$t = 0, t = 2$, el otro punto de r es para $t = 0$ resulta, $R'(0, 1, -1)$

- CUESTIÓN 6

Considere las rectas r y s dadas por la siguientes ecuaciones:

$r: \begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ y - 5z = 3 \end{cases} \quad$ y $\quad s: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-5}{0}$

a) Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) En caso de que las rectas se corten, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que las rectas se crucen, determine el plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

selcn Sep 2020 Solución:

Vamos a obtener un punto y un vector dirección de cada recta:

$r : \left\{ \begin{array}{l} 5x + 3y = 19 \\ y - 5z = 3 \end{array} \right.$ resolviendo el sistema dejando y como parámetro: $r : \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{19}{5} - \frac{3}{5}y \\ y = y \\ z = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}y \end{array} \right.$ por tanto:

$r : \left\{ \begin{array}{l} P(\frac{19}{5}, 0, -\frac{3}{5}) \\ \vec{v} = (-\frac{3}{5}, 1, \frac{1}{5}); \text{ o mejor } \vec{v} = (-3, 5, 1) \end{array} \right.$ $s : \left\{ \begin{array}{l} Q(1, 0, 5) \\ \vec{w} = (-1, 1, 0) \end{array} \right.$

Es inmediato ver que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no son proporcionales, por tanto las rectas no son paralelas, por tanto se cortan o se cruzan.

Consideramos el vector $\vec{QP} = (\frac{19}{5} - 1, 0, -\frac{3}{5} - 5) = (\frac{14}{5}, 0, -\frac{28}{5})$. Veamos el rango de $(\vec{QP}, \vec{v}, \vec{w})$. Calculamos el determinante de la matriz que forman: $\begin{vmatrix} \frac{14}{5} & 0 & -\frac{28}{5} \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{14}{5} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -14$, no nulo, por tanto r y s se cruzan.

b) El plano que contiene a r y es paralelo a s pasa por el punto P y tiene como vectores dirección $\vec{v}$ y $\vec{w}$, tiene de ecuación matricial: $\begin{vmatrix} x - \frac{19}{5} & y - 0 & z + \frac{3}{5} \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x - y + 2z + 5 = 0$

- CUESTIÓN 7

El peso de los recién nacidos, medido en kilogramos (kg), sigue una distribución normal de media $\mu = 2,8$ kg y desviación típica σ. Se sabe que solo el $20,05\,\%$ de ellos pesa mas de 3 kg.

a) Cual es la probabilidad de que un recién nacido pese mas de 2,6 kg?

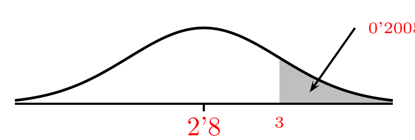
b) Calcule la desviación típica de esta distribución normal.

c) Cual es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,9 kg?

IMPORTANTE: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.

selcn Sep 2020 Solución:

a) Por simetría de la gráfica de la normal como 2'6 dista de la media $\mu = 2'8$ lo mismo que 3, a su izquierda está también el 20'05 %, por tanto la probabilidad de que un recién nacido pese más de 2,6 kg es del 79'95 %



b) Sabemos que $p(X \geq 3) = 0'2005$, en la $N(0, 1)$ para buscar en la tabla tenemos: $p(Z \geq z) = 0'2005$, corresponde con $p(Z \leq z) = 0'7995$ ese valor de la tabla se corresponde con $z = 0'84$.

sustituyendo en la tipificación: $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$, $\quad 0'84 = \dfrac{3 - 2'8}{\sigma}$, $\quad \sigma = \dfrac{0'2}{0'84} = 0'238$

c) $p(X \leq 2'9) = \left\{ \text{tipificando } z = \dfrac{2'9 - 2'8}{0'238} = 0'42 \right\} = p(Z \leq 0'42) = 0'6628$

Este valor es el tanto por uno, el tanto por ciento será 66'28 % de recién nacidos.

- CUESTIÓN 8

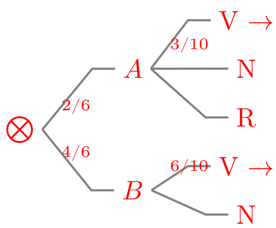
  Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 4 negras y 3 rojas, y la urna B contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras. Además, se tiene un dado que tiene 2 caras marcadas con la letra A y 4 caras marcadas con la letra B. Se lanza el dado y se saca una bola al azar de la urna que indica el dado.

  a) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea verde?

  b) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?

  c) Si bola extraída es verde, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

selcn Sep 2020 Solución:

a) 

Sumando las probabilidades de las ramas correspondientes:
$p(V) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{1}{2}$

b) $p(R) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$

c) $p(B/V) = \frac{p(V/B) \cdot p(B)}{p(V)} = \frac{\frac{4}{6} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$

nota: Se ha resuelto razonando en el árbol. Se podría haber hecho considerando los resultados del dado como un sistema completo de sucesos y entonces en los apartados a) y b) se aplicaría el teorema de la Probabilidad Total y en el c) el teorema de Bayes.

1.2. Junio 2020

- CUESTIÓN 1

Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x+y-z=4 \\ x+a^2y-z=3-a \\ x-y+az=1 \end{cases}$$

a) Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a=0$.

b) Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

selcn Jun 2020 Solución:

Primero estudiamos el sistema, para ello hacemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a^2 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^3+a^2-a-1$ que se anula para: $a=-1, a=1$

- Para $a \neq \pm 1 \quad rango(M)=3=rango(A)=$ número de incógnitas, sistema compatible determinado, tiene solución única.

  Vamos a resolverlo para $a=0$, el sistema queda: $\begin{cases} x+y-z=4 \\ x-z=3 \\ x-y=1 \end{cases}$, $|M|=-1$

  por Cramer:

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

- Para $a=-1$ la matriz ampliada es

  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, eliminamos la primera ecuación que es igual que la segunda, queda la matriz:

  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ en la que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

  Para $a=-1, \quad rango(M)=2=rango(A)<3=$ número de incógnitas, sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones dependientes de un parámetro.

  Vamos a resolver, el sistema queda:

  $\begin{cases} x+y-z=4 \\ x-y-z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=4+z \\ x-y=1+z \end{cases}$

  Sumando $2x=5+2z; \quad x=\dfrac{5}{2}+z, \quad$ Restando $2y=3; \quad y=\dfrac{3}{2}$

  Por tanto la solución es $x=\dfrac{5}{2}+t, \quad y=\dfrac{3}{2}, \quad z=t; \quad t \in R$

- Para $a=1$ la matriz ampliada es
  $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

  El menor resultante de eliminar la tercera columna es: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

  por tanto

  Para $a=1$, $\quad rango(M) = 2 < 3 = rango(A)$ sistema incompatible, no tiene solución.

- CUESTIÓN 2

  Considere las matrices

  $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

  a) Compruebe que las matrices A y B son regulares (o inversibles) y calcule sus matrices inversas.

  b) Resuelva la ecuación matricial $A\,X\,B = A^t - 3B$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

  selcn Jun 2020 Solución:

  a) Para que una matriz tenga inversa el determinante ha de ser distinto de 0.

  $|A| = -4+3 = -1$

  La inversa es la adjunta de la traspuesta dividida por el determinante:

  Hallamos $A^{-1}; |A| = -1; \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad adj(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

  $|B| = -2+3 = 1$

  La inversa es la adjunta de la traspuesta dividida por el determinante:

  Hallamos $B^{-1}; |B| = 1; \quad B^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; \quad adj(B^t) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

  b) Para resolver $A\,X\,B = A^t - 3B$ despejamos X:

  $A^{-1}\,A\,X\,B = A^{-1}\,(A^t - 3B); \quad X\,B = A^{-1}\,(A^t-3B); \quad X\,B\,B^{-1} = A^{-1}\,(A^t-3B)\,B^{-1};$

  $X = A^{-1}\,(A^t-3B)\,B^{-1}$

  $A^t - 3B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$

  $A^{-1}\,(A^t-3B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

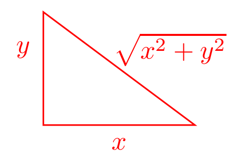
  $X = A^{-1}\,(A^t-3B)\,B^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 38 \\ -18 & -23 \end{pmatrix}$

- CUESTIÓN 3

  De entre todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 4 metros, determine las dimensiones de aquel cuya área es máxima. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

  selcn Jun 2020 Solución:

  Área: $S = \dfrac{x \cdot y}{2}$ máxima
  Pitágoras: $x^2 + y^2 = 4^2$. Despejamos y: $y = \sqrt{16 - x^2}$
  Sustituyendo en S:



  $$S(x) = \frac{x \cdot \sqrt{16 - x^2}}{2} = \frac{\sqrt{16x^2 - x^4}}{2} = \text{ha de ser máxima}$$

  $$S'(x) = \frac{32x - 4x^3}{4\sqrt{16x^2 - x^4}} = 0; \quad 32x - 4x^3 = 0 \quad x = -2\sqrt{2}, x = 2\sqrt{2}, x = 0$$

x		$2\sqrt{2}$	
S'	$+$		$-$
S	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$

  Resulta área máxima para el triángulo rectángulo isósceles de catetos $2\sqrt{2}$

  y ese área es: $S = \dfrac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 4 \text{ m}^2$

- CUESTIÓN 4

  a) Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\, dx$

  b) Determine el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de la función

  $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ y la recta vertical $x = 1$.

  selcn Jun 2020 Solución:

  $$\text{a)} \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt; \quad dx = 2t\, dt \end{array} \right\} = \int \frac{t}{1+t} 2t\, dt = 2 \int \frac{t^2}{1+t}\, dt = \begin{array}{l} \text{dividiendo} \\ \text{cociente} = t - 1 \\ \text{resto} = 1 \end{array}$$

  $$2 \int \left(t - 1 + \frac{1}{1+t} \right) dt = 2 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|1+t| \right) = t^2 - 2t + 2\ln|1+t| = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(\sqrt{x} + 1) + C$$

  b) La función es positiva en el intervalo de integración, luego el área es:

  $$S = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx = \left[x - 2\sqrt{x} + 2\ln(\sqrt{x} + 1) \right]_0^1 == 1 - 2 + 2\ln 2 - 0 = 2\ln 2 - 1$$

- CUESTIÓN 5

  Se llama **mediana** de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

  a) Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo de vértices $A = (-1, 2, 3), B = (3, -4, 1)$ y $C = (1, -4, 5)$.

b) Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

selcn Jun 2020 Solución:

a) Punto medio de $\bar{AB} = M_{AB} = (1, -1, 2)$

Punto medio de $\bar{AC} = M_{AC} = (0, -1, 4)$

Punto medio de $\bar{BC} = M_{BC} = (2, -4, 3)$

Mediana de A: punto $A = (-1, 2, 3)$, vector dirección $\vec{M_{BC}A} = (-3, 6, 0)$; tomamos $(1, -2, 0)$

$$m_A = \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 \end{cases}$$

Mediana de B: punto $B = (3, -4, 1)$, vector dirección $\vec{M_{AC}B} = (3, -3, -3)$; tomamos $(1, -1, -1)$

$$m_B = \begin{cases} x = 3 + s \\ y = -4 - s \\ z = 1 - s \end{cases}$$

Mediana de C: punto $C = (1, -4, 5)$, vector dirección $\vec{M_{AB}C} = (0, -3, 3)$; tomamos $(0, -1, 1)$

$$m_C = \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 - v \\ z = 5 + v \end{cases}$$

b) Hallemos el posible punto de corte igualando la última coordenada ”z” y comprobemos que cumple todas las igualdades:

$$\begin{cases} 1 - s = 3 \\ 5 + v = 3 \end{cases} \quad \text{resulta } s = -2; v = -2$$

Resulta el punto donde se cortan $(1, -2, 3)$ del que se deduce que $t = 2$ y pertenece a todas las medianas.

- CUESTIÓN 6

Considere la recta r y el plano π dados por las siguientes ecuaciones:

$$r : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0}, \qquad \pi : x - 2y - z = 4$$

a) Estudie la posición relativa de la recta y el plano.

b) En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso contrario, calcule la distancia entre la recta y el plano.

c) Determine el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

selcn Jun 2020 Solución:

a) Para r: $P(-1, 2, 1)$ es un punto, y $\vec{v} = (2, 1, 0)$ es un vector dirección.

El vector ortogonal de π es $\vec{w} = (1, -2, -1)$,

El producto escalar $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ y como el punto P de r no verifica la ecuación de π podemos afirmar que la recta y el plano son paralelos.

b) La distancia de r a π es la distancia de P a π: $d(P, \pi) = \left| \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \left| \dfrac{-1 - 4 - 1 - 4}{\sqrt{1 + 4 + 1}} \right| = \dfrac{10}{\sqrt{6}}$

c) El plano buscado contiene el punto P y los vectores dirección $\vec{v}, \vec{w}$ por tanto:

$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -x+2y-5z$. El plano que contiene a r y a π es $x-2y+5z=0$

- CUESTIÓN 7

Una urna tiene 2 bolas blancas y 3 bolas rojas. Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que se obtienen al repetir nueve veces el siguiente experimento: se saca una bola de la urna y, después de anotar el color, se devuelve la bola a la urna.

a) ¿Qué tipo de distribución sigue dicha variable aleatoria y cuáles son sus parámetros?

b) ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de bolas anotado sea menor o igual que 4?

selcn Jun 2020 Solución:

a) Estamos ante una variable aleatoria discreta X que sigue una distribución binomial $B(n,p)$, donde X es el número de bolas blancas. Entonces la probabilidad viene dada por: $p(X=x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$ con $q = 1-p$

En nuestro caso $n = 9$, $\quad p = 2/5 = 0'4$, es la probabilidad de acertar; $B(9, 0'4)$

b) Los parámetros de la binomial son:

$\mu = n.p = 9 \cdot 0'40 = 3'6, \quad \sigma^2 = n.p.q = 9 \cdot 0'40 \cdot 0'60 = 2'16, \quad \sigma = 1'469693 = 1'4697$

Por tanto: media $\mu = 3'6$, desviación típica $\sigma = 1'4697$

c) Nos piden $p(X \leq 4) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4)$ mirando las tablas:

$p(X=0) = \binom{9}{0} \cdot 0'60^9 = 0'0101$

$p(X=1) = \binom{9}{1} \cdot 0'40^1 \cdot 0'60^8 = 0'0605$

$p(X=2) = \binom{9}{2} \cdot 0'40^2 \cdot 0'60^7 = 0'1612$

$p(X=3) = \binom{9}{3} \cdot 0'40^3 \cdot 0'60^6 = 0'2508$

$p(X=4) = \binom{9}{4} \cdot 0'40^4 \cdot 0'60^5 = 0'2508$

Entonces $p(X \leq 4) = 0'7334$

- CUESTIÓN 8

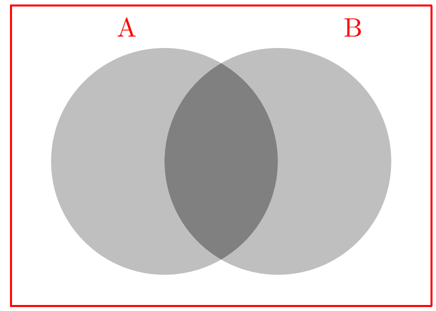
En una determinada población, el 40 % de los individuos lee diariamente la prensa y el 75 % ve diariamente las noticias en la televisión. Además, el 25 % de los individuos lee la prensa y ve las noticias en la televisión diariamente.

a) ¿Son independientes los sucesos "leer diariamente la prensa" y "ver diariamente las noticias en la televisión"?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo lea la prensa diariamente pero no vea las noticias en la televisión?

c) Si un individuo lee la prensa diariamente, ¿cuál es la probabilidad de que también vea las noticias en la televisión?

selcn Jun 2020 Solución:
"A" leer diariamente la prensa, $p(A) = 0'40$
"B" ver diariamente las noticias en la televisión, $p(B) = 0'75$



además dicen que $p(A \cap B) = 0'25$

a) $p(A) \cdot p(B) = 0'40 \cdot 0'75 = 0'30$ como no coincide con $p(A \cap B) = 0'25$ podemos afirmar que NO son independientes

b) Lee la prensa y no ve la televisión: $p(A \cap B^c) = p(A) - p(A \cap B) = 0'40 - 0'25 = 0'15$

c) Ve la televisión sabiendo que lee la prensa: $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0'25}{0'40} = 0'625$

Selectividad Matemáticas II (Murcia) 2

Año 2019

2.1. Septiembre 2019

- CUESTIÓN A.1 Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

  $$\left\{\begin{array}{c} ax+y-2z=0 \\ x+y-az=-1 \\ x+y+z=a \end{array}\right.$$

  a) Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a=2$.

  b) Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

  c) Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

  selcn Sep 2019 Solución:

  Hacemos el determinante de la matriz de coeficientes:

  $$|M|=\left|\begin{array}{ccc} a & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right|=a^2-1=0; \quad a=-1, a=1.$$

  a) Por tanto para los valores de a distintos de $-1,1$: $\quad rango(M)=3=rango(A)=$ n^0 incógnitas, el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

  Para $a=2$ resulta por Cramer: $\left\{\begin{array}{c} 2x+y-2z=0 \\ x+y-2z=-1 \\ x+y+z=2 \end{array}\right.$, tenemos que $|M|=3$

  $$x=\frac{\left|\begin{array}{rrr} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right|}{3}=\frac{3}{3}=1; \quad y=\frac{\left|\begin{array}{rrr} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right|}{3}=\frac{0}{3}=0; \quad z=\frac{\left|\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right|}{3}=\frac{3}{3}=1$$

  b) Para $a=-1$ la matriz ampliada queda: $A=\left(\begin{array}{rr|rr} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$, donde las dos últimas filas son iguales, por tanto $rango(M)=2=rango(A)<3$, el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones dependientes de un parámetro.

Para resolverlo nos quedamos con las dos primeras ecuaciones:

$\begin{cases} -x+y-2z=0 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} -x+y=2z \\ x+y=-1-z \end{cases}$

sumando: $2y=-1+z$, $y=\dfrac{z-1}{2}$; y sustituyendo en la primera $x=y-2z=\dfrac{z-1}{2}-2z=\dfrac{-3z-1}{2}$; $z\in R$

c) Para $a=1$ la matriz ampliada queda: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en la que se observa que la primera columna es igual a la segunda, haciendo el determinante de las tres últimas columnas queda

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=4\neq 0$ $rango(M)=2<3=rango(A)$, el sistema es incompatible, no tiene solución.

- CUESTIÓN A.2:

  a) Calcule los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{e^x}$, definida para todo valor de $x\in R$. Determine también los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$

  b) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

  selcn Sep 2019 Solución:

  a) Empezamos calculando la derivada: $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{e^x}=(x^2+2x)\cdot e^{-x}$

  $f'(x)=(2x-2)\,e^{-x}+(x^2+2x)\,e^{-x}\,(-1)=(2-x^2)\,e^{-x}$ que se anula en $x=\pm\sqrt{2}$, estudiamos el signo de la derivada:

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$	MÍNIMO	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$

  f tiene un MÍNIMO en $(-\sqrt{2},\dfrac{2-2\sqrt{2}}{e^{-\sqrt{2}}})$ y un MÁXIMO en $(\sqrt{2},\dfrac{2+2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}})$

  f decrece en $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\infty)$ y crece en $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

  b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\underset{\text{L'Hôpital}}{0/0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{(e^x-1)+x\,e^x}=\underset{\text{L'Hôpital}}{0/0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{e^x+e^x+x\,e^x}=\dfrac{1}{2}$

- CUESTIÓN A.3:

  Considere la recta $r:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ y el plano $\pi: x-2y-z=-1$.

  a) Estudie la posición relativa de la recta r y el plano π.

  b) En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que la recta no corte al plano, calcule la distancia entre ambos.

selcn Sep 2019 Solución:

a) Para r: $P(-1,-3,0)$ es un punto, y $\vec{v}=(-1,2,1)$ es un vector dirección.

El vector ortogonal de π es $\vec{w}=(1,-2,-1)$,

Como $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son proporcionales y por tanto paralelos, la recta y el plano se cortan y lo hacen perpendicularmente.

b) El ángulo es pues 90^0. Para hallar el punto de corte sustituimos las paramétricas de $r:\begin{cases} x=-1-t \\ y=-3+2t \\ z=t \end{cases}$ en la ecuación de π:

$-1-t-2(-3+2t)-t=-1;\quad 5-6t=-1;\quad t=1$, sustituyendo en $r:\begin{cases} x=-1-1=-2 \\ y=-3+2=-1 \\ z=1 \end{cases}$ Da como punto de corte $Q(-2,-1,1)$

- CUESTIÓN A.4:

  (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

  La probabilidad de que una flecha dé en la diana es 0'40. Si se lanzan 9 flechas, determine:

  a) Qué tipo de distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de flechas que dan en la diana.

  b) Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución.

  c) Cuál es la probabilidad de que al menos 5 flechas den en la diana.

  selcn Sep 2019 Solución:

  a) Estamos ante una variable aleatoria discreta X que sigue una distribución binomial $B(n,p)$, donde X es el número de aciertos. Entonces la probabilidad viene dada por: $p(X=x)=\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot q^{n-x}$ con $q=1-p$

  En nuestro caso $n=9,\quad p=0'40$, es la probabilidad de acertar; $B(9,0'40)$

  b) Los parámetros de la binomial son:

  $\mu=n.p=9\cdot 0'40=3'6,\quad \sigma^2=n.p.q=9\cdot 0'40\cdot 0'60=2'16,\quad \sigma=1'469693=1'4697$

  Por tanto: media $\mu=3'6$, desviación típica $\sigma=1'4697$

  c) Nos piden $p(X\geq 5)=p(X=5)+p(X=6)+p(X=7)+p(X=8)+p(X=9)$

  $p(X=5)=\binom{9}{5}\cdot 0'40^5\cdot 0'60^4=126\cdot 0'01024\cdot 0'1296=0'16721=0'1672$

  $p(X=6)=\binom{9}{6}\cdot 0'40^6\cdot 0'60^3=0'074317=0'0743$

  $p(X=7)=\binom{9}{7}\cdot 0'40^7\cdot 0'60^2=0'021233=0'0212$

  $p(X=8)=\binom{9}{8}\cdot 0'40^8\cdot 0'60=0'003538=0'0035$

  $p(X=9)=\binom{9}{9}\cdot 0'40^9=0'000262=0'0003$

  Entonces $p(X\geq 5)=0{,}2665$

- CUESTIÓN B.1:

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.

b) Para $a = 1$, calcule la inversa de A.

c) Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $XA + 2I = 2A$, donde I es la matriz identidad 3×3.

selcn Sep 2019 Solución:

a) $|A| = a^2 - a - 1 = 0, \quad a = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, por tanto para valores de a distintos de $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ la matriz tiene inversa.

b) Para $a = 1$, $|A| = -1 \neq 0$.

Hallamos la inversa de la matriz: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ La inversa es: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} adj(A^t)$

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$adj(A^t) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

como el determinante de la matriz dada es -1 la matriz inversa es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $XA + 2I = 2A; \quad XA = 2A - 2I = 2(A - I); \quad XA\,A^{-1} = 2(A - I)\,A^{-1}; \quad X = 2(A - I)\,A^{-1}$

$$2(A - I) = 2\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 2\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = 2(A - I)\,A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- CUESTIÓN B.2:

a) Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1 + x} dx$

b) Determine la primitiva de $\dfrac{\sqrt{x}}{1 + x}$ que pasa por el punto $(1, 2)$.

c) Calcule el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

selcn Sep 2019 Solución:

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = \left\{\begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2t}dx \\ dx = 2tdt \end{array}\right\} = \int \frac{t}{1+t^2}\,2t\,dt =$ dividiendo $\displaystyle\int\left(2-\frac{2}{t^2+1}\right)dt = 2t - 2ar\tan t = 2\sqrt{x} - 2ar\tan\sqrt{x} + C$

b) $F(x) = 2\sqrt{x} - 2ar\tan\sqrt{x} + C$, ha de ser $F(1) = 2$, $\quad 2\sqrt{1} - 2ar\tan\sqrt{1} + C = 2 - 2ar\tan 1 + C = 2 - 2\frac{\pi}{4} + C = 2, \quad C = \frac{\pi}{2}$

La primitiva que pasa por el punto $(1,2)$ es $F(x) = 2\sqrt{x} - 2ar\tan\sqrt{x} + \dfrac{\pi}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{1+x} =$ dividiendo por $x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}+1} = 0$

- CUESTIÓN B.3:

Los puntos $A=(0,-1,1)$ y $B=(1,1,1)$ son dos de los vértices de un triángulo. El tercer vértice C está contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano $\pi : 2x - y + z = 1$.

a) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano π.

b) Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

selcn Sep 2019 Solución:

a) Sirve como vector dirección de la recta el ortogonal a plano π que tiene de coordenadas $(2,-1,1)$ por tanto $r : \left\{\begin{array}{l} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = 1+t \end{array}\right. , t\in R$

b) El área del triángulo viene dado por $S = \dfrac{1}{2}|\vec{AB}\wedge\vec{AC}|$

$\vec{AB} = (1,2,0), \vec{AC} = (1+2t, 1-t+1, 1+t-1) = (1+2t, 2-t, t)$

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1+2t & 2-t & t \end{vmatrix} = 2t\,\vec{i} - t\,\vec{j} - 5t\,\vec{k}$$

El módulo es: $|\vec{AB}\wedge\vec{AC}| = \sqrt{(2t)^2 + (-t)^2 + (-5t)^2} = \sqrt{30t^2}$

El área es pues: $3\sqrt{30} = \dfrac{1}{2}\sqrt{30t^2}; \quad 3 = \dfrac{1}{2}\sqrt{t^2}; \quad t^2 = 36; \quad t = \pm 6$

Sustituyendo en r

$t=6, \quad \left\{\begin{array}{l} x = 1+12 = 13 \\ y = 1-6 = -5 \\ z = 1+6 = 7 \end{array}\right. ,\quad$ El punto es $C(13,-5,7)$

$t=-6, \quad \left\{\begin{array}{l} x = 1-12 = -11 \\ y = 1+6 = 7 \\ z = 1-6 = -5 \end{array}\right. ,\quad$ El punto es $C(-11,7,-5)$

- CUESTIÓN B.4:

  (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

  El 60 % de los coches de una marca se fabrican en su factoría de Valencia, el 25 % en Madrid, y el resto en Lisboa. El 1 % de los coches fabricados en Valencia tiene algún defecto de fabricación, mientras que para los coches fabricados en Madrid y en Lisboa estos porcentajes son del 0'5 % y del 2 %, respectivamente.

  a) Elegido al azar un coche de esa marca, calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.

  b) Si un coche de esa marca resulta ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en Madrid?

  selcn Sep 2019 Solución:

  $D =$ defectuoso, V, M, L, forman un sistema completo de sucesos.

  a) Teorema de la probabilidad total:

  $$p(D) = p(D/V) \cdot p(V) + p(D/M) \cdot p(M) + p(D/L) \cdot p(L) = 0,01 \cdot \frac{60}{100} + 0,005 \cdot \frac{25}{100} + 0,02 \cdot \frac{15}{100} = 0,0103$$

  La probabilidad de no ser defectuoso es $p(D^c) = 1 - p(D) = 0'9897$

  b) Teorema de Bayes:

  $$p(M/D) = \frac{p(D/M) \cdot p(M)}{p(D/V) \cdot p(V) + p(D/M) \cdot p(M) + p(D/L) \cdot p(L)} = \frac{0,00125}{0,0103} = 0,1214$$

2.2. Junio 2019

- CUESTIÓN A.1 Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

  $$\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=a \\ ax+y+z=a+3 \end{cases}$$

  a) Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a=0$.

  b) Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

  c) Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

  selcn Jun 2019 Solución:

  Hacemos el determinante de la matriz de coeficientes:

  $$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^3+3a^2-2=0; \quad a=-2, a=1.$$

  a) Por tanto para los valores de a distintos de $-2, 1$: $\quad rango(M)=3=rango(A)=$ n^0 incógnitas, el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

  Para $a=0$ resulta por Cramer: $\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=0 \\ y+z=3 \end{cases}$, tenemos que $|M|=-2$

  $$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{2}{-2}=-1; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{8}=\frac{-4}{-2}=2; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{-2}{-2}=1$$

  b) Para $a=-2$ la matriz ampliada queda: $A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ \hline -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$, donde el menor

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ por tanto $rango(M)=2=rango(A)<3$, el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones dependientes de un parámetro.

  Para resolverlo nos quedamos con las dos primeras ecuaciones:

  $$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-2y+z=-2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+y=1+2z \\ x-2y=-2-z \end{cases}$$

  restando: $3y=3+3z, \quad y=1+z$; y sustituyendo en la primera $x=z; \quad z\in R$

  La solución es pues: $r:\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases} \quad z\in R$

  c) Para $a=1$ la matriz ampliada queda: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ en la que se observa que

$rango(M) = 1 < 2 = rango(A)$, el sistema es incompatible, no tiene solución.

- CUESTIÓN A.2 a) Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 \cos x \, dx$

  b) Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 \cos x$.

  selcn Jun 2019 Solución:

  a) Es integral por partes $\int x^2 \cos x \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \cos x dx & v = \operatorname{sen} x \end{array} \right\} = x^2 \operatorname{sen} x - \int 2x \operatorname{sen} x dx =$

  $\left\{ \begin{array}{ll} u = 2x & du = 2dx \\ dv = \operatorname{sen} x dx & v = -\cos x \end{array} \right\} = x^2 \operatorname{sen} x - \left[-2x \cos x + \int 2 \cos x dx \right] = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C$

  b) La función cambia de signo en $\frac{\pi}{2}$ por tanto hacemos la integral en dos partes:

  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx = \left[x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - 2$

  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cos x \, dx = \left[x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2\pi - \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - 2 \right]$

  El área es la primera integral menos la segunda: $S = 2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - 4 + 2\pi = \frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 4$

- CUESTIÓN A.3 Los puntos $A = (3,0,0)$, $B = (0,3,0)$ y $C = (0,0,3)$ son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice D está contenido en la recta r que pasa por el punto $P = (1,1,1)$ y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos A, B y C.

  a) Calcule la ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C.

  b) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (1,1,1)$ y es perpendicular al plano π.

  c) Calcule las coordenadas del vértice D sabiendo que el volumen del tetraedro es 18.

  selcn Jun 2019 Solución:

  a) El plano que pasa por los tres puntos es el que contiene al punto $A(3,0,0)$, y tiene vectores dirección $\vec{AB} = (-3,3,0)$, $\vec{AC} = (-3,0,3)$ es:

  $\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9x + 9y + 9z - 27 = 0$ El plano buscado es $\pi : \quad x + y + z - 3 = 0$

  b) La recta perpendicular a π que pasa por P es (utilizando como vector director de r el ortogonal de π): $r : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$

  c) Nos interesa la recta r en paramétricas: $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{array} \right.$

  Consideramos el vector de A a un punto D de r: $\vec{AD} = (1 + t - 3, 1 + t, 1 + t) = (-2 + t, 1 + t, 1 + t)$

  Entonces el volumen del tetraedro que determinan los vectores $\vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AC}$ y que tiene que valer 18 es:

$$V = \frac{1}{6}\left[\vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AC}\right] = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -2+t & 1+t & 1+t \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left(18(t+1)+9(t-2)\right) = \frac{1}{6}27t = 18; \quad t = 4$$

Sustituyendo en la ecuación de r: $\begin{cases} x = 1+4 = 5 \\ y = 1+4 = 5 \\ z = 1+4 = 5 \end{cases}$. El punto $D : (5, 5, 5)$

- CUESTIÓN A.4 (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

  El tiempo de duración de las bombillas de una cierta marca, medido en horas, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Se sabe que el 69'50 % de las bombillas duran menos de 5061'2 horas, y que el 16'60 % de de las bombillas duran más de 5116'4 horas.

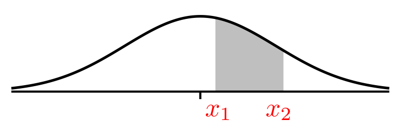
  a) ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla de esta marca dure entre 5061,2 y 5116,4 horas?

  b) Calcule la media y la desviación típica de esta distribución normal.

  selcn Jun 2019 Solución:

  Nos dicen que estamos en una normal $N(\mu, \sigma)$ y que $p(X < 5061'2) = 0'6950$ y que $p(X > 5116'4) = 0'1660)$

  a) La probabilidad que piden es el tanto por ciento restante es decir:
  $p(5061'2 < X < 5116'4) = 1 - 0'6950 - 0'1660 = 0,1390$
  Por tanto el 13'90 % de las bombillas duran entre 5061'2 horas y 5116'4 horas.

  b) En normal $N(0, 1)$:

  $p(Z < z_1) = 0'6950$ se corresponde con $z_1 = 0'51$

  $p(Z > z_2) = 0'1660$ se corresponde con $z_2 = 0'97$

  Sustituyendo en la fórmula de la tipificación $x = \mu + \sigma \cdot z$ tenemos:

  $\begin{cases} 5061'2 = \mu + \sigma \cdot 0'51 \\ 5116'4 = \mu + \sigma \cdot 0'97 \end{cases}$

  Resolviendo el sistema: $5116'4 - 5061'2 = (0'97 - 0'51)\sigma; \quad \sigma = 120$ horas; $\quad 5061'2 = \mu + 120 \cdot 0'51; \quad \mu = 5000$ horas.

- CUESTIÓN B.1

  a) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  a) calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4.

  b) ¿Cuál será la expresión general de la potencia A^n para cualquier valor de n ?.

  c) Determine si existe la inversa de A. En caso afirmativo, calcúlela.

  selcn Jun 2018 Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) La expresión general de la potencia A^n para cualquier valor de n será:

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

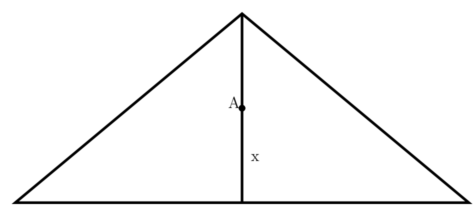
(Propiamente habría que demostrarlo por inducción)

c) Como $|A| = 1 \neq 0$ hay inversa:

Hallamos $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} adj(A^t)$; $\quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- CUESTIÓN B.2

Considere un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observe la figura:



a) Demuestre que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$

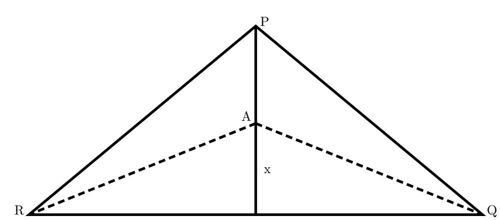
b) Calcule el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.

c) Calcule dicha cantidad mínima.

selcn Jun 2019 Solución:

a) La distancia a P es $5 - x)$ y la distancia a Q y a R es $\sqrt{x^2 + 6^2}$.

La suma de las distancias es $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 6^2} = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$



b) Derivamos $f'(x) = -1 + 2\,\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 36}} = -1 + \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 36}} = \dfrac{-\sqrt{x^2 + 36} + 2x}{\sqrt{x^2 + 36}}$

estudiamos el crecimiento:: $-\sqrt{x^2 + 36} + 2x = 0$; $\quad (2x)^2 = x^2 + 36$; $\quad 3x^2 = 36$; $\quad x = \pm 2\sqrt{3}$

x		$2\sqrt{3}$	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$	MÍNIMO	$\nearrow$

c) $f(2\sqrt{3}) = 5-2\sqrt{3}+2\sqrt{(2\sqrt{3})^2+36} = 5-2\sqrt{3}+2\sqrt{12+36} = 5-2\sqrt{3}+2\sqrt{48} = 5-2\sqrt{3}+8\sqrt{3} = 5+6\sqrt{3}$

- CUESTIÓN B.3 Considere las siguientes rectas:

  $r : \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-6}{1} = \dfrac{z+1}{1}, \quad s : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$

  a) Estudie la posición relativa de ambas rectas.

  b) En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

  selcn Jun 2019 Solución:

  Vamos a obtener un punto y un vector dirección de cada recta:

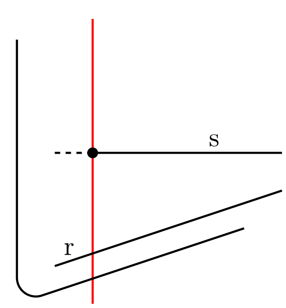
  $r : \begin{cases} P(5,6,-1) \\ \vec{v} = (1,1,1) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} Q(1,0,-1) \\ \vec{w} = (1,1,-1) \end{cases}$

  a) Observamos que los vectores no son proporcionales por tanto las rectas se cortan o se cruzan

  Consideramos el vector $\vec{QP} = (4,6,0)$ el producto mixto $[\vec{QP}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ nos indica que las rectas se cruzan.

  b) La perpendicular común tiene como vector dirección el vector perpendicular a los vectores dirección de las rectas dadas:

  $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$ vector: $(-2,2,0)$ o mejor $\vec{v_\perp} = (-1,1,0)$

  Ahora hallamos el plano π_r que contiene a una de ellas, por ejemplo r, y contiene a este vector $\vec{v_\perp}$:

  $\begin{vmatrix} x-5 & y-6 & z+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad -x-y+2z+13=0, \quad \pi_r : x+y-2z-13=0$

  Ahora hallamos el punto de intersección de este plano π_r con la recta s : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = -1-t \end{cases}$, sustituyendo en π_r

  $1+t+t-2(-1-t)-13=0; \quad t = \dfrac{5}{2}$, sustituyendo en s $\begin{cases} x = 1+\frac{5}{2} = \frac{7}{2} \\ y = \frac{5}{2} \\ z = -1-\frac{5}{2} = \frac{-7}{2} \end{cases}$

  La perpendicular común es: $s : \begin{cases} x = \frac{7}{2} - t \\ y = \frac{5}{2} + t \\ z = -\frac{7}{2} \end{cases}$

- CUESTIÓN B.4 (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

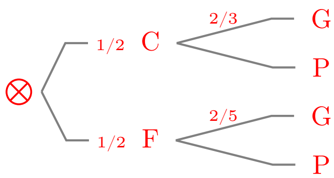
  La probabilidad de que un determinado equipo de fútbol gane cuando juega en casa es $\dfrac{2}{3}$, y la probabilidad de que gane cuando juega fuera es $\dfrac{2}{5}$.

  a) Sin saber dónde jugará el próximo partido, calcule la probabilidad de que gane.

  b) Si ganó el último partido del campeonato, ¿cuál es la probabilidad de que jugara en casa?

  selcn Jun 2019 Solución:

  Consideramos los sucesos: C jugar en casa, F jugar fuera, G ganar, P perder.



  $\{C, F\}$, forman un sistema completo de sucesos.

  a) Teorema de la probabilidad total: $p(G) = p(G/C) \cdot p(C) + p(G/F) \cdot p(F) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{8}{15}$

  b) Teorema de Bayes:

  $$p(C/G) = \frac{p(G/C) \cdot p(C)}{p(G/C) \cdot p(C) + p(G/F) \cdot p(F)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{8}{15}} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{8}{15}} = \frac{5}{8}$$

Selectividad Matemáticas II (Murcia) 3

Año 2018

3.1. Septiembre 2018

- CUESTIÓN A.1:

  Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

  a) Compruebe que la matriz A es regular (o invertible) y calcule su inversa.

  b) Determine la matriz X que cumple la ecuación $A\,X = A + A^t$, donde A^t es la matriz traspuesta de A.

  selcn Sep 2018 Solución:

  a) Para que una matriz tenga inversa el determinante ha de ser distinto de 0.

  $|A| = 4 - 3 = 1$

  La inversa es la adjunta de la traspuesta dividida por el determinante:

  Hallamos $A^{-1}; |A| = 1; \quad A^t = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad adj(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

  b) $A\,X = A + A^t$ multiplicando por la izquierda por la inversa de A:

  $A^{-1}A\,X = A^{-1}(A + A^t); \quad X = A^{-1}(A + A^t)$

  $A + A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix};$

  $X = A^{-1}(A + A^t) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-4 & -8+4 \\ 12-8 & -12+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

- CUESTIÓN A.2:

  Calcule los siguientes límites:

  a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-2}\right)$

  b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x + \operatorname{sen} x)}{x}$

selcn Sep 2018 Solución:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)=\infty-\infty=$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}} =$ suma por diferencia es diferencia de cuadrados $=$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2-(x^2-2)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x+\operatorname{sen} x)}{x} = \dfrac{0/0}{\text{L'Hôpital}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-\operatorname{sen} x+\cos x}{\cos x+\operatorname{sen} x}}{1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\operatorname{sen} x+\cos x}{\cos x+\operatorname{sen} x} = \dfrac{1}{1} = 1$

- CUESTIÓN A.3:

  a) Calcule la siguiente integral indefinida $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, e^{\cos x} dx$

  b) Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x=0$ y $x=\pi/2$, y la gráfica de la función $f(x)=\operatorname{sen} x\, e^{\cos x}$

  selcn Sep 2018 Solución:

  a) Es casi inmediata, para que esté multiplicando la derivada del exponente falta solo el signo:

  $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, e^{\cos x} dx = -\int (-\operatorname{sen} x)\, e^{\cos x} dx = -e^{\cos x} + C$

  b) Entre los límites de integración la función es positiva por tanto el área viene dada directamente por la integral:

  $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, e^{\cos x} dx = [-e^{\cos x}]_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{-\cos\frac{\pi}{2}} + e^{\cos 0} = -e^0 + e^1 = -1 + e$

- CUESTIÓN A.4:

  Considere las rectas r y s dadas por la siguientes ecuaciones:

  $r: \begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ x+3y+5z=1 \end{cases}$ y $s: \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$

  a) Compruebe que ambas rectas son paralelas.

  b) Determine la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano que contiene a ambas rectas.

  selcn Sep 2018 Solución:

  a) Hallamos un vector dirección de r

  $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -14\vec{i} - 7\vec{j} + 7\vec{k}$

  que es proporcional al vector dirección de s : $\vec{v_s} = (2,1,-1)$

  Es inmediato ver que el punto de s : $P_s(5,0,0)$ no verifica la primera ecuación de r por tanto no pertenece a r

Concluimos que son paralelas

b) método 1: Necesitamos otro vector dirección del plano, para ello buscamos un punto de r, haciendo $z = 0$ en las ecuaciones de r $\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 1 \end{array} \right.$

resolviendo $x = 1 - 3y$; $\quad 2(1 - 3y) - y = 3$; $\quad 2 - 6y - y = 3$; $\quad -7y = 1$; $\quad y = -\frac{1}{7}$; $\quad x = 1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$

Tenemos pues el punto de $r : P_r(\frac{10}{7}, -\frac{1}{7}, 0)$, consideramos el vector $\vec{P_sP_r} = (\frac{10}{7} - 5, -\frac{1}{7}, 0) = (-\frac{25}{7}, -\frac{1}{7}, 0)$ como sólo nos interesa la dirección tomamos el vector proporcional $(25, 1, 0)$

El plano que contiene a las dos rectas paralelas es:

$$\begin{vmatrix} x-5 & y & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 25 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x - 25y - 23z - 5 = 0$$

b) método 2:

Del haz de planos definido por r tomamos el plano que pasa por $P_s(5, 0, 0)$

$2x - y + 3z - 3 + k(x + 3y + 5z - 1) = 0; 10 - 3 + k(5 - 1) = 0; k = -\frac{7}{4}$

$2x - y + 3z - 3 - \frac{7}{4}(x + 3y + 5z - 1) = 0$; $\quad 8x - 4y + 12z - 12 - 7x - 21y - 35z + 7 = 0$; $\quad x - 25y - 23z - 5 = 0$ es el plano buscado.

- CUESTIÓN A.5:

En una clase hay 40 estudiantes, de los cuales 25 son chicas y el resto son chicos. Además, 30 estudiantes han aprobado las matemáticas, de los cuales 10 son chicos.

a) Elegido un estudiante al azar, se pide:

a.1) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya aprobado las matemáticas?

a.2) ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica y haya aprobado las matemáticas?

b) Si se elige un estudiante que ha aprobado las matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que sea una chica?

selcn Sep 2018 Solución:

Denotamos los sucesos A : "chica"; M : "aprobar matemáticas"

Ponemos los datos en una tabla:

$\bigcap$	A	A^c	
M		10	30
M^c			
	25		40

Completamos la tabla

$\bigcap$	A	A^c	
M	20	10	30
M^c	5	5	10
	25	15	40

a)

a$_1$: $p(M^c) = \dfrac{10}{40} = 0'25$

a$_2$: $p(A \cap M) = \dfrac{20}{40} = 0'5$

b) $p(A/M) = \dfrac{p(A \cap M)}{p(M)} = \dfrac{0'5}{0'75} = \dfrac{2}{3} = 0'666$

- CUESTIÓN B.1:

  Considere el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo en función del parámetro a:

$$\left\{ \begin{array}{r} ax + y + az = 0 \\ x + y + az = 0 \\ 2x + (a-1)y + az = 0 \end{array} \right.$$

  a) Determine los valores del parámetro a para los que el sistema tiene únicamente la solución trivial (0,0,0).

  b) Si es posible, resuélvalo para el valor del parámetro $a = 2$.

  selcn Sep 2018 Solución:

  Hacemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\left| \begin{array}{ccc} a & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 2 & a-1 & a \end{array} \right| = -a^3 + 3a^2 - 2a = 0; \quad a = 1, a = 2, a = 0.$$

  Por tanto el sistema tiene únicamente la solución trivial para los valores de a distintos de $0, 1, 2$

  b) Para $a = 2$ queda el sistema: $\left\{ \begin{array}{r} 2x + y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{array} \right.$ que es equivalente al sistema: $\left\{ \begin{array}{r} 2x + y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{array} \right.$

  $\left\{ \begin{array}{r} 2x + y = -2z \\ x + y = -2z \end{array} \right.$ restando $x = 0$ y entonces $y = -2z$. La solución es: $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -2t \\ z = t \end{array} \right. ; \quad t \in R$

- CUESTIÓN B.2:

  Considere la función $f(x) = x\sqrt{18 - x^2}$ con $-4 < x < 4$.

  a) Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus puntos críticos.

  b) Justifique si la función $f(x)$ tiene algún máximo o mínimo.

  selcn Sep 2018 Solución:

  a) y b) Derivamos y anulamos la derivada:

$$f'(x) = \sqrt{18 - x^2} + x\,\frac{-2x}{2\sqrt{18 - x^2}} = \sqrt{18 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{18 - x^2}} = \frac{18 - 2x^2}{\sqrt{18 - x^2}} = 0; \quad 18 - 2x^2 = 0, \quad x = \pm 3$$

  Estudiamos el crecimiento:

x		-3		3	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$	MÍNIMO	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$

- CUESTIÓN B.3:

  a) Calcule la siguiente integral indefinida $\displaystyle\int x \ln x \, dx$.

  b) Determine la primitiva de la función $f(x) = x \ln x$ que pasa por el punto de coordenadas $(1, 0)$.

  selcn Sep 2018 Solución:

  a) $\displaystyle\int x \ln x \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x; & du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x\, dx, & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \ln x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \ln x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2} dx = \ln x \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C$

  b) Sea $F(x)$ la primitiva: tenemos $F(1) = 0 :\quad \ln 1 \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + C = 0; \quad C = \frac{1}{4}$

  La primitiva que pasa por $(1, 0)$ es $F(x) = \ln x \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{4}$

- CUESTIÓN B.4:

  Considere los puntos $P = (1, 1, 3)$ y $Q = (1, 5, 0)$ y la recta r dada por la ecuación:

  $$r : \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - 2z = -3 \\ -x + y = 4 \end{array} \right.$$

  a) Compruebe que el punto P no está en la recta r y que el punto Q sí lo está.

  b) Determine el punto R de la recta r tal que el triángulo PQR sea un triángulo rectángulo en P (es decir, con ángulo recto en el vértice P).

  c) Calcule el área de dicho triángulo PQR.

  selcn Sep 2018 Solución:

  a) El punto $P = (1, 1, 3)$ no cumple la segunda ecuación de r luego no está en r

  El punto $Q = (1, 5, 0)$ cumple las dos ecuaciones de r luego sí está en r

  b) Pasamos la recta a paramétricas resolviendo el sistema indeterminado:

  $$r : \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = -3 + 2z \\ -x + y = 4 \end{array} \right. \qquad \text{por Cramer } x = \frac{\begin{vmatrix} -3+2z & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 1 + 2z, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3+2z \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}{1} = 5 + 2z$$

  $$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = t \end{array} \right. \qquad t \in R \text{ Un punto genérico de } r \text{ es } R(1 + 2t, 5 + 2t, t).$$

  Consideramos los vectores $\vec{PQ} = (1 - 1, 5 - 1, 0 - 3) = (0, 4, -3)$; $\quad \vec{PR} = (1 + 2t - 1, 5 + 2t - 1, t - 3) = (2t, 4 + 2t, -3 + t)$, hacemos que sean perpendiculares: el producto escalar ha de ser 0.

  $\vec{PQ} \cdot \vec{PR} = 0 + 4(4 + 2t) - 3(-3 + t) = 25 + 5t = 0; \quad t = -5$

  El punto R resulta ser $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2(-5) = -9 \\ y = 5 + 2(-5) = -5 \\ z = -5 \end{array} \right. \qquad R(-9, -5, -5)$

  c) método 1

  El área del triángulo viene dada por $S = \dfrac{1}{2} |\vec{PQ} \wedge \vec{PR}|$; $\qquad \vec{PR} = (-9 - 1, -5 - 1, -5 - 3) = (-10, -6, -8)$

$\vec{BA} \wedge \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & -3 \\ -10 & -6 & -8 \end{vmatrix} = -50\vec{i} + 30\vec{j} + 40\vec{k}$; $\quad S = \dfrac{1}{2}\sqrt{50^2 + 30^2 + 40^2} = \dfrac{\sqrt{5000}}{2} = \dfrac{50\sqrt{2}}{2} =$ $25\sqrt{2},\ u^2$

c) método 2

Como $\vec{PQ}, \vec{PR}$ son los catetos del triángulo rectángulo, $S = \dfrac{1}{2}|\vec{PQ}| \cdot |\vec{PR}|$

$|\vec{PQ}|\sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2} = 5$

$\vec{PR} = (-9-1, -5-1, -5-3) = (-10, -6, -8)$; $\quad |\vec{PR}| = \sqrt{10^2 + 6^2 + 8^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

$S = \dfrac{1}{2}5 \cdot 10\sqrt{2} = 25\sqrt{2},\ u^2$

- CUESTIÓN B.5:

Realizada una encuesta entre los habitantes de una ciudad, se ha llegado a la conclusión de que el 40 % de sus habitantes lee habitualmente el periódico local, el 30 % lee revistas del corazón y el 20 % lee ambos tipos de publicaciones. Elegido un habitante al azar, se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que lea al menos alguno de los dos tipos de publicaciones?

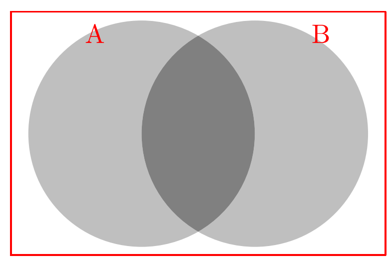
b) ¿Cuál es la probabilidad de que no lea ninguno de los dos tipos de publicaciones?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que lea solo revistas del corazón?

selcn Sep 2018 Solución:

Sea: A = leer periódico local ; B = leer revistas del corazón. Los datos son:

$p(A) = 0'40; \quad p(B) = 0'30; \quad p(A \cap B) = 0'20$



a) Leer alguno es la unión:
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0'40 + 0'30 - 0'20 = 0'50$;
por tanto el 50 % lee al menos alguno
b) No lea ninguno es lo contrario del anterior por tanto:
$p(A^c \cap B^c) = 1 - 0'50 = 0'50$
c) Es quitarle a B la intersección:
$p(B \cap A^c) = 0'30 - 0'20 = 0'10$

3.2. Junio 2018

- CUESTIÓN A1.

  a) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  a) calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4.

  b) ¿Cuál será la expresión general de la potencia A^n para cualquier valor de n ?.

  selcn Jun 2018 Solución:

  a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  b) La expresión general de la potencia A^n para cualquier valor de n ? será:

  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- CUESTIÓN A.2

  a) Descomponga el número 10 en dos sumandos positivos de manera que la suma de uno de ellos más el doble del logaritmo (neperiano) del otro sea máxima.

  b) Calcule dicha suma máxima.

  selcn Jun 2018 Solución:

  a) Los números son x y $10 - x$

  $f(x) = 10 - x + 2\ln x$ ha de ser máxima. Veremos el crecimiento con el signo de la derivada:

  $f'(x) = -1 + \dfrac{2}{x} = 0; \quad \dfrac{2}{x} = 1; \quad x = 2$

x		2	
f'	$+$		$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

  Hay un máximo en $x = 2$.

  b) La suma máxima es $f(2) = 10 - 2 + 2\ln 2 = 8 + 2\ln 2 = 9'386$

- CUESTIÓN A.3

  a) Calcule la siguiente integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx$.

b) Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x=0$ y $x=2$, y la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

selcn Jun 2018 Solución:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx = \int x\left(2x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x\left(2x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{4}\frac{\left(2x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1}+C.$

b) Como la función es positiva en el intervalo, la integral definida da directamente el área:

$\displaystyle \mathrm{S} = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2x^2+1}\right]_0^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{9}-\sqrt{1}) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1\ \mathrm{u}^2$

- CUESTIÓN A.4

Considere el plano π dado por la ecuación $3x-2y+z=3$.

a) Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r dada por $r:\begin{cases} x+3y+3z=0 \\ y+2z=1 \end{cases}$

b) En caso de que la recta r sea paralela al plano π , calcule la distancia entre ambos. En caso de que la recta r corte al plano π, calcule el punto de corte y el ángulo de corte entre ambos.

selcn Jun 2018 Solución:

Pasamos la recta a paramétricas resolviendo el sistema indeterminado:

$r:\begin{cases} x+3y+3z=0 \\ y+2z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+3y+3z=0 \\ y=1-2z \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3y-3z \\ y=1-2z \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3(1-2z)-3z=-3+3z \\ y=1-2z \end{cases}$

$r:\begin{cases} x=-3+3t \\ y=1-2t \\ z=t \end{cases}$ $;t\in R$. Luego para r: $P(-3,1,0)$ es un punto, y $\vec{v}=(3,-2,1)$ es un vector dirección.

El vector ortogonal de π es $\vec{w}=(3,-2,1)$, el mismo, por tanto la recta y el plano se cortan y lo hacen perpendicularmente.

b) El ángulo es pues 90^0. Para hallar el punto de corte sustituimos las paramétricas de r en la ecuación de π:

$3(-3+3t)-2(1-2t)+t=3;\quad 14t=14;\quad t=1$, sustituyendo en $r:\begin{cases} x=-3+3 \\ y=1-2 \\ z=1 \end{cases}$ Da como punto de corte $Q(0,-1,1)$

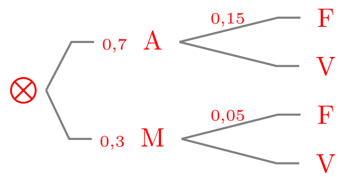
- CUESTIÓN A.5

Una máquina funciona en modo automático el 70 % de los días y el resto de los días funciona en modo manual. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo automático es 0'15. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo manual es 0'05.

a) Calcule la probabilidad de que no tenga ningún fallo.

b)Si un día tiene un fallo, ¿cuál es la probabilidad de que haya funcionado en modo manual?

selcn Jun 2018 Solución:



Automático y Manual $\{A, M\}$, forman un sistema completo de sucesos.

a) Sea V no fallar, F fallar; por el teorema de la probabilidad total:

$p(V) = p(V/A) \cdot p(A) + p(V/M) \cdot p(M) = 0'85 \cdot 0'7 + 0'95 \cdot 0'3 = 0'88$

b) Teorema de Bayes:

$$p(M/F) = \frac{p(F/M) \cdot p(M)}{p(F/A) \cdot p(A) + p(F/M) \cdot p(M)} = \frac{0'05 \cdot 0'3}{0'15 \cdot 0'7 + 0'05 \cdot 0'3} = 0'125$$

- CUESTIÓN B.1

Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a: $\begin{cases} x - y + z = 4a \\ y + z = -4 \\ x + 2z = a^2 \end{cases}$

a) Justifique que el sistema nunca es compatible determinado.

b) Determine para qué valor del parámetro a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

selcn Jun 2018 Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4a \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ El rango de } M \text{ es } 2.$$

Para hallar el rango de A orlamos el menor que da el rango anterior:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4a \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 - 4\,a + 4 = (a-2)^2 \text{ cuya raíz es } a = 2 \text{ doble}$$

Por tanto:

- Para $a \neq 2$ $\quad rango(M) = 2 < 3 = rango(A) =$ sistema incompatible, es decir sin solución.
- Para $a = 2$ $\quad rango(M) = 2 = rango(A) < 3 =$ número de incógnitas, sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones dependientes de un parámetro.

a) Está justificado que nunca es compatible determinado.

b) Falta resolver para $a = 2$

El sistema es equivalente al formado por las dos últimas ecuaciones: $\begin{cases} y + z = -4 \\ x + 2z = 4 \end{cases}$, resolviendo: $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -4 - t \\ z = t \end{cases}$

Solución: $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -4 - t \quad ; \quad t \in R \\ z = t \end{cases}$

- CUESTIÓN B.2

Considere la función dada por $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & si \quad x < 0 \\ a + b \operatorname{sen} x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función $f(x)$ es continua y derivable en $x = 0$.

selcn Jun 2018 Solución:

Hagamos primero que sea continua:

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (a + b \operatorname{sen} x) = a$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{ax} = 1$

Como $f(0) = e$ para que sea continua ha de ser $a = 1$

Hagamos ahora que sea derivable:

$f(x) = \begin{cases} e^{x} & si \quad x < 0 \\ 1 + b \operatorname{sen} x & si \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} e^{x} & si \quad x < 0 \\ b \cos x & si \quad x > 0 \end{cases}$

Hacemos los límites laterales de la derivada:

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (b \cos x) = b$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{x} = 1$

Para que coincidan: $b = 1$, entonces la función es derivable en $x = 0$

- CUESTIÓN B.3

a) Calcule la siguiente integral indefinida

$\displaystyle\int xe^x \, dx.$

b) Determine la primitiva de la función $f(x) = xe^x$ que pasa por el punto de coordenadas $(0, 1)$.

selcn Jun 2018 Solución:

a) Es integral por partes $\displaystyle\int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

b) Hacemos que la primitiva $F(x) = xe^x - e^x + C$ pase por $(0, 1$: $F(0) = -e^0 + C = 1; \quad C = 2.$

La primitiva buscada es $F(x) = xe^x - e^x + 2$

- CUESTIÓN B.4

Considere el punto $P = (0, 1, 2)$ y la recta r dada por la ecuación: $r : \begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$

a) Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano π que es perpendicular a la recta r y pasa por el punto P.

b) Calcule la distancia del punto P al plano $x + y + z = 5$.

selcn Jun 2018 Solución:

a) La recta viene dada como intersección de planos, vamos a buscar un vector dirección:

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{j} - 3\vec{k}$; un vector dirección de r es pues: $\vec{v} = (0,1,1)$ y sirve como vector ortogonal del plano perpendicular:

$\pi : y + z + D = 0$ hacemos que pase por $P = (0,1,2)$: $1 + 2 + D = 0$ queda $\pi : y + z - 3 = 0$

a) La distancia de un punto al plano es: $d(P, \pi') = \left| \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \left| \dfrac{0 + 1 + 2 - 5}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \right| = \left| \dfrac{-2}{\sqrt{3}} \right| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

- CUESTIÓN B.5

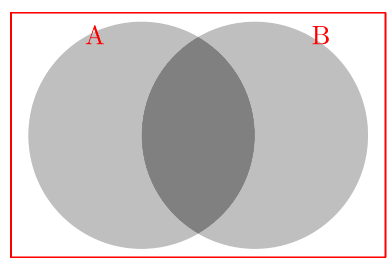
En un peña del Atlético de Madrid, el 70 % de sus miembros prefiere que Antoine Griezmann continúe jugando en el equipo durante la próxima temporada, el 50 % prefiere que Fernando Torres continúe jugando en el equipo la próxima temporada y el 30 % prefiere que ambos jugadores sigan jugando en el equipo en la próxima temporada. Elegido al azar un miembro de la peña, se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que al menos alguno de los dos jugadores siga jugando en el equipo la próxima temporada?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que ninguno de los dos jugadores siga jugando en el equipo la próxima temporada?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que solo Fernando Torres siga jugando en el equipo la próxima temporada?

selcn Jun 2018 Solución:
Sea: A = que Antoine Griezmann continúe jugando ; B = que Fernando Torres continúe jugando. Los datos son:
$p(A) = 0'7; \quad p(B) = 0'5; \quad p(A \cap B) = 0'3$



a) Al menos uno continúe jugando es la unión:
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0'7 + 0'5 - 0'3 = 0'9$

b) Que ninguno continúe jugando es el complementario del anterior
$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0'9 = 0'1$

c) Solo Fernando Torres continúe jugando
$p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B) = 0'5 - 0'3 = 0'2$

Selectividad Matemáticas II (Murcia) 4

Año 2017

4.1. Septiembre 2017

- CUESTIÓN A.1: Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

  a)Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.

  b) Determine la matriz X que cumple la ecuación $A\,X\,B = A + B$.

  selcn Sep 2017 Solución:

  a) Para que una matriz tenga inversa el determinante ha de ser distinto de 0.

  $|A| = 6 - 4 = 2; \quad |B| = 0 + 2 = 2$

  La inversa es la adjunta de la traspuesta dividida por el determinante:

  Hallamos $A^{-1}; |A| = 2; \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad adj(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$

  $B^{-1}; |B| = 2; \quad B^t = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad adj(B^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

  b) Resolvemos la ecuación $AXB = A + B; \quad A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}(A+B)B^{-1}$

  $X = A^{-1}(A+B)B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -5/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

- CUESTIÓN A.2: Considere la recta r que pasa por los puntos $A = (1,1,1)$ y $B = (3,3,4)$ y la recta s cuyo vector director es $\vec{v} = (-1,3,1)$ y pasa por el punto $C = (4,0,3)$.

  a) Determine las ecuaciones continuas de r y s.

  b) Estudie la posición relativa de r y s.

  selcn Sep 2017 Solución:

a) Recta r, vector dirección $\vec{AB}=(2,2,3)$, $\quad r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$

Recta $s:\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-3}{1}$

b) Consideramos el vector $\vec{AC}=(3,-1,2)$, $\vec{v}=(2,2,3)$ de r, $\vec{w}=(-1,3,1)$ de s

Como $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no son proporcionales las rectas no son paralelas, por tanto se cortan o se cruzan,

Hacemos el determinante

$[\vec{AC},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0$, por tanto las rectas se cortan en un punto.

- CUESTIÓN A.3: Calcule los siguientes límites:

  a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x$

  b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

  selcn Sep 2017 Solución:

  a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x=\{1^\infty\}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\left(\frac{x-1}{x+3}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\left(\frac{x-1-x-3}{x+3}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-4x}{x+3}\right)}=e^{-4}$

  b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{\ln x\cdot(x-1)}=\begin{matrix}0/0\\ \text{L'Hôpital}\end{matrix}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1)+\ln x\cdot 1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1+x\ln x}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1+x\ln x}=\begin{matrix}0/0\\ \text{L'Hôpital}\end{matrix}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\ln x+\frac{x}{x}}=\frac{1}{2}$

- CUESTIÓN A.4: a) Calcule la siguiente integral indefinida $\displaystyle\int\frac{\cos x\,\text{sen}^2 x}{1+\text{sen}^2 x}\,dx$

  b) Obtenga una primitiva $F(x)$ de la función $\dfrac{\cos x\,\text{sen}^2 x}{1+\text{sen}^2 x}$ que cumpla la condición $F(\dfrac{\pi}{2})=1$.

  selcn Sep 2017 Solución:

  a) La integral es impar en coseno, el cambio es por tanto $\text{sen}\, x=t$

  $\displaystyle\int\frac{\cos x\,\text{sen}^2 x}{1+\text{sen}^2 x}\,dx\left\{\begin{array}{l}\text{sen}\, x=t\\ \cos x dx=dt\end{array}\right\}=\int\frac{t^2}{1+t^2}dt=\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=t-ar\tan t=\text{sen}\, x-ar\tan(\text{sen}\, x)+C$

  $F(x)=\text{sen}\, x-ar\tan(\text{sen}\, x)+C$,

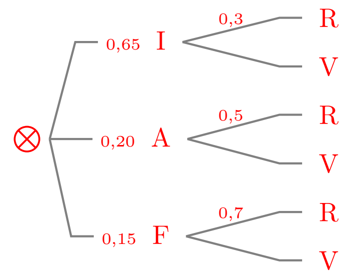
  $F(\frac{\pi}{2})=\text{sen}\,\frac{\pi}{2}-ar\tan(\text{sen}\,\frac{\pi}{2})+C=1-ar\tan 1+C=1-\frac{\pi}{4}+C=1;\quad C=\frac{\pi}{4}$

  La primitiva buscada es $F(x)=\text{sen}\, x-ar\tan(\text{sen}\, x)+\dfrac{\pi}{4}$

- CUESTIÓN A.5: En un colegio se imparten, como primer idioma, inglés, alemán y francés. El 65 % de los alumnos estudian inglés, el 20 % alemán y el resto francés. La asignatura de robótica es optativa y la elige el 30 % de los alumnos de inglés, el 50 % de los que estudian alemán y el 70 % de los que cursan francés. Se elige un alumno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que estudie robótica?

selcn Sep 2017 Solución:

Llamamos R al suceso " estudiar robótica".
Llamamos V al suceso " no estudiar robótica".
Llamamos I al suceso " estudiar inglés".
Llamamos A al suceso " estudiar alemán".
Llamamos F al suceso " estudiar francés".



$\{I, A, F, \}$, forman un sistema completo de sucesos.

Teorema de la probabilidad total:

$p(R) = p(R/I) \cdot p(I) + p(R/A) \cdot p(A) + p(R/F) \cdot p(F) = 0,65 \cdot 0,3 + 0,20 \cdot 0,5 + 0,15 \cdot 0,7 = 0,4$

- CUESTIÓN B.1:

Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ x + 2ay + z = 2 \\ x + 2y + az = -3 \end{cases}$$

a) Determine para qué valores del parámetro a el sistema tiene solución única. No hay que resolverlo.

b) Determine para qué valor del parámetro a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valor del parámetro a el sistema no tiene solución.

selcn Sep 2017 Solución:

Primero estudiamos el sistema, para ello hacemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 2\,a^3 - 6\,a + 4 \text{ que se anula para: } a = -2, a = 1$$

- Para $a \neq -2$ y $a \neq 1$ $rango(M) = 3 = rango(A) =$ número de incógnitas, sistema compatible determinado.

- Para $a = -2$ la matriz ampliada es

  $$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \text{ el menor: } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

  por tanto el rango de M y de A es 2 luego:

  Para $a = -2$, $rango(M) = 2 = rango(A) < 3 =$ número de incógnitas, sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones dependientes de un parámetro.

- Para $a = 1$ la matriz ampliada es

$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ \cline{3-4} 1 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right)$, el menor: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

por tanto

Para $a = 1$, $\quad rango(M) = 1 < 2 = rango(A)$ sistema incompatible.

a) Luego para $a \neq -2$ y $a \neq 1$ $\quad rango(M) = 3 = rango(A) =$ número de incógnitas, sistema compatible determinado: tiene solución única.

b) Como hemos visto para $a = -2$ tiene infinitas soluciones dependientes de un parámetro, el sistema queda:

$\begin{cases} -2x + 2y + z = 1 \\ x - 4y + z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x + 2y = 1 - z \\ x - 4y + = 2 - z \end{cases}$

resolviendo por Cramer

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1-z & 2 \\ 2-z & -4 \end{vmatrix}}{6} = \dfrac{-4 + 4z - 4 + 2z}{6} = \dfrac{-8 + 6z}{6} = -\dfrac{4}{3} + z, \qquad y = \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & 1-z \\ 1 & 2-z \end{vmatrix}}{6} = \dfrac{-4 + 2z - 1 + z}{6} = \dfrac{-5 + 3z}{6} = -\dfrac{5}{3} + \dfrac{z}{2}$

Por tanto la solución es $x = -\dfrac{4}{3} + t, \quad y = -\dfrac{5}{6} + \dfrac{1}{2}t, \quad z = t; \quad t \in R$

c) Por lo ya estudiado el sistema no tiene solución para $a = 1$

- CUESTIÓN B.2:

Considere los puntos $A = (1, 1, 1), B = (1, -1, 0)$ y $C = (0, -2, 1)$.

a) Calcule el área del triángulo ABC.

b) Calcule la ecuación de la recta (en cualquiera de sus formas) contenida en el plano que forman A, B y C que, pasando por A, es perpendicular al lado BC.

selcn Sep 2017 Solución:

a) El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\vec{AB} = (0, -2, -1), \quad \vec{AC} = (-1, -3, 0)$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ El módulo es $\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$

El área es $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$ u^2

b) Una opción rápida que da la recta buscada como intersección de planos es cortar el plano que contiene a los tres puntos, del que ya conocemos un vector ortogonal $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$, con el plano π perpendicular a la recta $\vec{BC}$ por A

Plano determinado por A, B y C: $-3x + y - 2z + D$, sustituyendo A queda: $-3 + 1 - 2 + D = 0; \quad D = 4$ plano: $-3x + y - 2z + 4 = 0$

Plano π perpendicular a la recta $\vec{BC}$ por A: $-x - y + z + D = 0$, sustituyendo A: $-1 - 1 + 1 + D = 0; \quad D = 1; \quad \pi : -x - y + z + 1 = 0$

La recta buscada que pasa por A y es perpendicular a BC viene dada por $\begin{cases} -3x + y - 2z + 4 = 0 \\ -x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$

Otra opción

La recta que contiene al lado $\vec{BC}$ tiene de vector dirección: $\vec{BC}(-1, -1, 1)$, y es: $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 - t \\ z = 0 + t \end{cases}$

Buscamos la recta perpendicular trazada por el punto $A = (1, 1, 1)$

Hallamos el plano π perpendicular a la recta por A, $-x - y + z + D = 0$, sustituyendo A: $-1 - 1 + 1 + D = 0$; $D = 1$; $\pi : -x - y + z + 1 = 0$

Hacemos la intersección de π y r: $-(1 - t) - (-1 - t) + t + 1 = 0$; $3t + 1 = 0$; $t = -\dfrac{1}{3}$, sustituyendo en r:
$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ y = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}$ tenemos el punto de intersección $M(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3})$

Entonces el vector $\vec{AM} = \left(\dfrac{4}{3} - 1, -\dfrac{2}{3} - 1, -\dfrac{1}{3} - 1\right) = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{5}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$, como solo nos interesa la dirección tomamos como vector dirección de la recta buscada el proporcional $(-1, 5, 4)$

La recta buscada es $s : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 5t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$

- CUESTIÓN B.3: Dada la función $f(x) = xe^{-x^2}$ se pide:

  a) Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

  b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función.

  selcn Sep 2017 Solución:

  a) Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} xe^{-x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{e^{x^2}} = \underset{\text{L'Hôpital}}{\infty/\infty} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{2xe^{x^2}} = 0$

  b) $f'(x) = e^{-x^2} + x \cdot (-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$ que se anula para $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & & -\frac{1}{\sqrt{2}} & & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ \hline y' & - & | & + & | & - \\ \hline y & \searrow & | & \nearrow & | & \searrow \\ & & \text{MÍNIMO} & & \text{MÁXIMO} & \end{array}$$

  Como $f(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$, $f(\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$

  MÍNIMO: $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}\right)$ MÁXIMO: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}\right)$

- CUESTIÓN B.4: Calcule la siguiente integral indefinida $\displaystyle\int \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2}\, dx$

  selcn Sep 2017 Solución:

Por partes: $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx = \int \ln(1+x^2)x^{-2}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u=\ln(1+x^2) & du=\dfrac{2x}{1+x^2}\,dx \\ dv=x^{-2}\,dx & v=\int x^{-2}\,dx=-x^{-1}=-\dfrac{1}{x} \end{array} \right\} =$

$\displaystyle -\frac{1}{x}\ln(1+x^2)+\int \frac{1}{x}\frac{2x}{1+x^2}\,dx = -\frac{\ln(1+x^2)}{x}+\int \frac{2}{1+x^2}\,dx = -\frac{\ln(1+x^2)}{x}+2ar\tan x + C$

- CUESTIÓN B.5: Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $P(A)=\dfrac{3}{5}$, $P(B)=\dfrac{7}{10}$ y $P(\bar{A}\cap\bar{B})=\dfrac{1}{10}$

  Calcule:$P(A\cup B), P(A\cap B), P(\bar{B}/A)$.

  selcn Sep 2017 Solución:

  $\bar{A}\cap\bar{B}$ es el complementario de $A\cup B$, por tanto:

  $p(A\cup B)=1-P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{10}$

  Como $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$, sustituyendo:

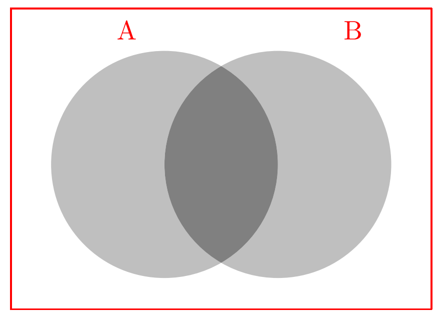
  $\dfrac{9}{10}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{7}{10}-p(A\cap B)$ luego $p(A\cap B)=\dfrac{3}{5}+\dfrac{7}{10}-\dfrac{9}{10}=\dfrac{4}{10}$

  $P(\bar{B}/A)=\dfrac{P(\bar{B}\cap A)}{p(A)}$

  Como $P(\bar{B}\cap A)=p(A)-p(A\cap B)=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{10}$

  Sustituyendo:

  $P(\bar{B}/A)=\frac{\frac{2}{10}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$



4.2. Junio 2017

- CUESTIÓN A1.

  Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

  a) Compruebe que ambas matrices A y b son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.

  b) Determine la matriz X que cumple la ecuación $A\,X\,B = C$.

  selcn Jun 2017 Solución:

  a) Para que una matriz tenga inversa el determinante ha de ser distinto de 0.

  $|A| = -4; \quad |B| = 2 - 6 = -4$

  La inversa es la adjunta de la traspuesta dividida por el determinante:

  Hallamos $A^{-1}; |A| = -4; \quad A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad adj(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

  $B^{-1}; |B| = -4; \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad adj(B^t) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$

  b) Resolvemos la ecuación $AXB = C; \quad A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}\,C\,B^{-1}$

  $X = A^{-1}\,C\,B^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$
  $\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 16 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 \\ 1 & -3/4 \end{pmatrix}$

- CUESTIÓN A2.

  Considere el plano π que pasa por el punto $P = (1, 2, 3)$ y tiene como vectores directores a $\vec{u} = (1, -1, 0), \quad \vec{v} = (1, 0, 2)$. Considere la recta r que pasa por los puntos $A = (1, 0, 4)$ y $B = (3, 2, 2)$.

  a) Determine la ecuación de π.

  b) Determine la ecuación de r.

  c) Estudie la posición relativa de π y r.

  selcn Jun 2017 Solución:

  El plano que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$, y tiene vectores dirección $\vec{u} = (1, -1, 0), \quad \vec{v} = (1, 0, 2)$ es:

  $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2x - 2y + z + 3 = 0$. El plano buscado es $\pi : \quad 2x + 2y - z - 3 = 0$

  b) La recta que pasa por los puntos $A = (1, 0, 4), \quad B = (3, 2, 2)$ tiene como vector dirección $\vec{AB} = (3-1, 2-0, 2-4) = (2, 2, -2)$, podemos tomar más cómodo $\vec{v_r} = (1, 1, -1)$. Luego la ecuación continua de la recta es $r : x - 1 = y = \dfrac{z-4}{-1}$

  c) Hacemos el producto escalar del vector $\perp$ de π $\vec{w} = (2, 2, -1)$ con el vector dirección de r $\vec{v_r} \cdot \vec{w} = 2+2+1 = 5 \neq 0$ por tanto la recta y el plano son secantes.

- CUESTIÓN A3.

  Calcule los siguientes límites:

  a) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{4}{x-4}\right)=$

  b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x-x\cos x)}{x-\operatorname{sen}x}=$

  selcn Jun 2017 Solución:

  a)

  $$\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right)=\{\infty-\infty \text{ operando }\}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4-4\sqrt{x}+8}{(\sqrt{x}-2)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+4-4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(x-4)}=\left\{\frac{0}{0}\text{ L'Hôpital }\right\}=$$
  $$\lim_{x\to 4}\frac{1-\frac{2}{\sqrt{x}}}{(\frac{1}{2\sqrt{x}})(x-4)+\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}}{\frac{(x-4)+2x-4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 4}\frac{2\sqrt{x}-4}{3x-4-4\sqrt{x}}=\left\{\frac{0}{0}\text{ L'Hôpital }\right\}=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{3-\frac{4}{2\sqrt{x}}}=$$
  $$\frac{1}{4}$$

  O bien multiplicando por el conjugado en la primera fracción

  $$\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-4}-\frac{4}{x-4}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+2-4}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\left\{\frac{0}{0}\text{ L'Hôpital }\right\}=$$
  $$\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=\frac{1}{4}$$

  b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-x\,\cos x)}{x+\operatorname{sen}x}=\left\{\frac{0}{0}\text{ L'Hôpital}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\operatorname{sen}x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen}x}{1-\cos x}=\left\{\frac{0}{0}\text{ L'Hôpital}\right\}=$$
  $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x+x\cos x}{\operatorname{sen}x}=\left\{\frac{0}{0}\text{ L'Hôpital}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos x-x\operatorname{sen}x}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-x\operatorname{sen}x}{\cos x}=\frac{2}{1}=2$$

- CUESTIÓN A4.

  a) Calcule la siguiente integral indefinida $\displaystyle\int x\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\,dx$

  b) Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x=0$ y $x=1$, y la gráfica de la función $f(x)=x\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{2}$

  selcn Jun 2017 Solución:

  a) $$\int x\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\,dx=\left\{\begin{array}{l} u=x;\quad du=dx\\ dv=\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\,dx;\quad v=\int\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\,dx=\frac{2}{\pi}\int\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\,dx=-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\end{array}\right\}=-\frac{2x}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}+$$
  $$\frac{2}{\pi}\int\cos\frac{\pi x}{2}\,dx=-\frac{2x}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{4}{\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}+C$$

  b) Como al variar x entre 0 y 1 el ángulo varía entre 0 y $\pi/2$ la función es no negativa en el intervalo de integración, por tanto el área viene dada directamente por la integral:

  $$S=\int_0^1 x\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\,dx=\left[-\frac{2x}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{4}{\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\right]_0^1=-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}-0=\frac{4}{\pi^2}\,u^2$$

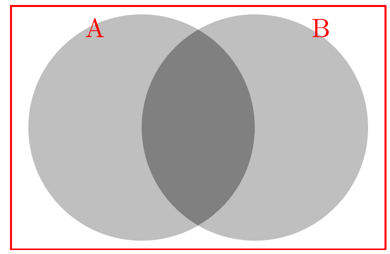
- CUESTIÓN A5.

  Según un estudio reciente, el 68 % de los encuestados poseen un smartphone, el 38 % tienen una tablet y el 16 % disponen de ambos dispositivos.

a) Calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no disponga de ninguno de los dos dispositivos.

b) Resulta que la persona elegida posee un smartphone, ¿que probabilidad hay de que tenga una tablet?

selcn Jun 2017 Solución:
Sea: A = tener smartphone ; B = tener tablet. Los datos son:
$p(A) = 0'68; \quad p(B) = 0'38; \quad p(A \cap B) = 0'16$



a) No tener ninguno es lo contrario de tener alguno, de la unión:
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0'68 + 0'38 - 0'16 = 0'90;$
por tanto el 10 % no tiene ninguna de las dos cosas
b) Es probabilidad condicionada, como $p(A \cap B) = p(B/A) \cdot p(A)$.
Despejando:
$p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0'16}{0'68} = 0'235,$

- CUESTIÓN B1.

Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a: $\left\{\begin{array}{r} 2x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x - y + a^2 z = a - 1 \end{array}\right.$

a) Determine para qué valores del parámetro a el sistema tiene solución única. No hay que resolverlo.

b) Determine para qué valor del parámetro a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valor del parámetro a el sistema no tiene solución.

selcn Jun 2017 Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a^2 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2 - 4; \text{que se anula para: } a = \pm 1$$

- Para $a \neq \pm 1 \quad rango(M) = 3 = rango(A) =$ número de incógnitas, sistema compatible determinado.
- Para $a = 1$ la matriz ampliada es
  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ resulta un sistema homogéneo, es evidente que el rango de M y de A es 2 por tanto
  Para $a = 1, \quad rango(M) = 2 = rango(A) < 3 =$ número de incógnitas, sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones dependientes de un parámetro.
- Para $a = -1$ la matriz ampliada es
  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, el menor: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$

por tanto

Para $a=-1$, $\quad rango(M)=2<3=rango(A)$ sistema incompatible.

Por tanto:

a) El sistema tiene solución única cuando $a \neq \pm 1$

b) El sistema tiene tiene infinitas soluciones cuando $a=1$. Resolvemos, el sistema es equivalente a:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y+2z=0 \\ 2x+3y+2z=0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 2x+y=-2z \\ 2x+3y=-2z \end{array}\right.$$

resolviendo por Cramer, $\left|\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{array}\right|=4, \qquad x=\dfrac{\left|\begin{array}{cc} -2z & 1 \\ -2z & 3 \end{array}\right|}{4}=\dfrac{-4z}{4}=-z, \qquad y=\dfrac{\left|\begin{array}{cc} 2 & -2z \\ 2 & -2z \end{array}\right|}{4}=\dfrac{0}{4}$

la solución es $\left\{\begin{array}{l} x=-z \\ y=0 \\ z \in R \end{array}\right.$

c) El sistema no tiene solución cuando $a=-1$

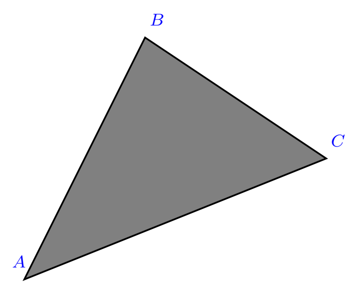
- CUESTIÓN B2.

  Los vértices de un triángulo ABC son $A=(-a,1,1)$, $\quad B=(2,-1,2)$, $\quad C=(1,-2a,3)$.

  a) ¿Cuánto ha de valer a para que el triángulo sea rectángulo en B?

  b) Calcule el área del triángulo ABC para el caso $a=-1$.

  selcn Jun 2017 Solución:

  $A(-a,1,1); B(2,-1,2); C(1,-2a,3)$

  a) Los vectores $\vec{BA}=(-a-2,2,-1)$; $\vec{BC}=(-1,-2a+1,1)$, son perpendiculares si su producto escalar es nulo:
  $\vec{BA}\cdot\vec{BC}=a+2-4a+2-1=-3a+3=0; \quad a=1$

  b) El área del triángulo viene dada por $S=\dfrac{1}{2}|\vec{BA}\wedge\vec{BC}|$

  Para $a=-1$ quedan: $A(1,1,1); B(2,-1,2); C(1,2,3) \qquad \vec{BA}=(-1,2,-1)$; $\vec{BC}=(-1,3,1)$

  $\vec{BA}\wedge\vec{BC}=\left|\begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{array}\right|=5\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}; \qquad S=\frac{1}{2}\sqrt{5^2+2^2+1^2}=\frac{\sqrt{30}}{2},\ u^2$

- CUESTIÓN B3.

  La producción mensual de una fábrica de bombillas viene dada por $P=2LK^2$ (en millones), donde L es el coste de la mano de obra y K es el coste del equipamiento (en millones de euros). La fábrica pretende producir 8 millones de unidades al mes. ¿Qué valores de L y K minimizarían el coste total $L+K$?

selcn Jun 2017 Solución:

$P = 2\,L\,K^2$, con $P = 8$

$f = L + K$ ha de ser mínimo

Despejando L en $2\,L\,K^2 = 8$, $\quad L = \dfrac{4}{k^2}$, por comodidad sustituimos K por x, sustituyendo en f queda:

$f(x) = \dfrac{4}{x^2} + x$ mínimo;

estudiamos el crecimiento: $f'(x) = \dfrac{-8}{x^3} + 1 = \dfrac{x^3 - 8}{x^3} = 0, \quad x = 2$

x		2	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$	MÍNIMO	$\nearrow$

Por tanto el mínimo coste se tiene para $K = 2$ millones de € y $L = 1$ millones de €

- CUESTIÓN B4.

  Calcule la siguiente integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 + x - 6}\,dx$

  selcn Jun 2017 Solución:

  Primero vamos a ver si se puede descomponer en factores el denominador; raíces del denominador $x = 2, x = -3$; reales simples; la descomposición es:

  $$\frac{x}{x^2 + x - 6} = \frac{x}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

  A y B los obtenemos identificando numeradores $x = A(x+3) + B(x-2)$

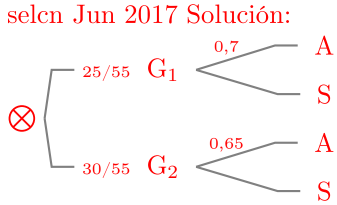
  $$\begin{cases} \text{para } x = 2: \quad 2 = A(2+3); \quad A = \dfrac{2}{5} \\ \text{para } x = -3: \quad -3 = B(-3-2); \quad B = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

  $$\int \frac{x}{x^2 + x - 6}\,dx = \int \left(\frac{\frac{2}{5}}{x-2} + \frac{\frac{3}{5}}{x+3} \right) dx = \frac{2}{5} \ln|x-2| + \frac{3}{5} \ln|x+3| + C$$

- CUESTIÓN B5.

  Dos aulas de 2^0 de Bachillerato hacen conjuntamente un examen de Matemáticas. En el primer grupo hay 25 alumnos de los cuales aprueba el 70 %, mientras que en el segundo grupo, de 30 alumnos, lo hace el 65 %. De entre todos lo exámenes se elige uno al azar y resulta que está aprobado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de un alumno del primer grupo?

  selcn Jun 2017 Solución:



  $\{A, B\}$, forman un sistema completo de sucesos.

  Teorema de Bayes:

  $$p(G_1/A) = \frac{p(A/G_1) \cdot p(G_1)}{p(A/G_1) \cdot p(G_1) + p(A/G_2) \cdot p(G_2)} = \frac{0,7 \cdot \frac{25}{55}}{0,7 \cdot \frac{25}{55} + 0,65 \cdot \frac{30}{55}} = 0,473$$

Selectividad Matemáticas II (Murcia) 5

Año 2016

5.1. Septiembre 2016

- CUESTIÓN A1.

  Considere la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  a) Calcule el determinante de A.

  b) Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4 y A^5. Calcule A^{2016}.

  selcn Sep 2016 Solución:

  a) $|A| = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha = -1$

  b) $A^2 = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$
  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

  $A^3 = A^2 \cdot A = I_3 \cdot A = A;\qquad A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = I_3;\qquad A^5 = A^4 \cdot A = I_3 \cdot A = A$

  De esta forma $A^{2016} = A^{2\cdot 1008} = \left(A^2\right)^{1008} = I_3^{1008} = I_3$

- CUESTIÓN A2.

  Los puntos $P = (1,1,1), Q = (2,2,2)$ y $R = (1,3,3)$ son tres vértices consecutivos del siguiente paralelogramo:

a) Calcule el área del paralelogramo.

b) Determine el cuarto vértice del paralelogramo.

selcn Sep 2016 Solución:

a) y b)

Hallaremos primero el vértice $S(x, y, z)$ pues el área pedida es área del paralelogramo determinado por $\vec{PQ}$ y $\vec{PS}$ y viene dada por el módulo del producto vectorial $S = |\vec{PQ} \wedge \vec{PS}|$

Son iguales los vectores $\vec{PQ} = (2-1, 2-1, 2-1) = (1, 1, 1)$ y $\vec{SR} = (1-x, 3-y, 3-z)$ igualando coordenadas resulta: $x = 0, y = 2, z = 2$, luego $S(0, 2, 2)$

Resulta el vector $\vec{PS} = (0-1, 2-1, 2-1) = (-1, 1, 1)$ por tanto $\vec{PQ} \wedge \vec{PS} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{j} + 2\vec{k}$ es el vector: $(0, -2, 2)$ cuyo módulo es $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.

El área del paralelogramo es $S = \sqrt{8}$

- CUESTIÓN A3.

  Dada la función $f(x) = e^{\frac{2x}{1+x^2}}$ se pide:

  a) Estudie las asíntotas de la gráfica de $f(x)$.

  b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función.

  selcn Sep 2016 Solución:

  a) Asíntotas horizontales: $y = n$

  $n = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{2x}{1+x^2}} = e^0 = 1$, por la derecha $+\infty$ y por la izquierda $-\infty$

  Asíntota horizontal en $y = 1$ por ambos lados

  Ya no se estudian las oblicuas.

  Respecto a las asíntotas verticales, valores de x que hagan "infinita" la y, vemos que no hay pues el denominador no se anula.

  b) Crecimiento y extremos:

  $f'(x) = e^{\frac{2x}{1+x^2}} \dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$. Anulando queda $2 - 2x^2 = 0, \quad x = \pm 1$

x		-1		1	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$	MÍNIMO	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$

- CUESTIÓN A4.

  a) Calcule la siguiente integral indefinida $\displaystyle\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$

  b) Determine el valor de $a>0$ para que $\displaystyle\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx = \frac{1}{4}$

  selcn Sep 2016 Solución:

  a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} t=e^x \\ dt=e^x dx \\ dx=\frac{dt}{t}\end{array}\right\} = \int \frac{1}{(1+t)^2}dt = \frac{-1}{1+t} = \frac{-1}{1+e^x}+C$

  b) $\displaystyle\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{1+e^x}\right]_0^a = \frac{-1}{1+e^a} + \frac{+1}{1+e^0} = \frac{-1}{1+e^a} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; \quad \frac{-1}{1+e^a} = \frac{-1}{4}; \quad 1+e^a=4; \quad e^a = 3; \quad a=\ln 3$

- CUESTIÓN B1.

  Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2$ calcule razonadamente los siguientes determinantes:

  a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

  b) $\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

  selcn Sep 2016 Solución:

  a) Como al multiplicar una línea por un número el determinante queda multiplicado por ese número, y al intercambiar dos líneas cambia de signo $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 2y & z \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -12$

  b) Como si cada elemento de una determinada fila es igual a la suma de varios sumandos, el determinante es igual a la suma de los determinantes que se obtienen al sustituir dicha fila por los primeros sumandos, los segundos, etc.

  $\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ Como el último tiene dos filas proporcionales vale $0 = \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ Como el último tiene dos filas proporcionales vale $0 = 3\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ que con dos intercambios de filas queda como el dado por tanto el determinante es $3 \cdot 2 = 6$

- CUESTIÓN B2.

  Considere el plano π que pasa por el punto $P = (2, 0, 1)$ y tiene como vectores directores los vectores $\vec{v} = (1, 0, 2)$ y $\vec{w} = (0, 1, -2)$. Considere la recta r dada por $r: \quad \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{1}$

  a) Estudie la posición relativa de π y r.

  b) Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto $Q = (-1, 0, -2)$, es paralela a π y perpendicular a r.

  selcn Sep 2016 Solución:

  Método I

  a) Buscamos la ecuación general del plano π : $\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2x + 2y + z + 3 = 0$

  Hacemos el producto escalar del vector ortogonal a π : $\vec{v_\pi} = (-2, 2, 1)$ y el vector dirección de r : $\vec{v_r} = (2, 3, 1)$ que es $\vec{v_\pi} \cdot \vec{v_r} = -4 + 6 + 1 \neq 0$ luego esos vectores no son ortogonales y por tanto π y r no son paralelos y por tanto π **y** r **se cortan en un punto**.

  b) El vector director de la recta buscada es $\perp$ al ortogonal de π y $\perp$ al director de r por tanto el producto vectorial de ambos es dirección de la recta buscada:

  $\vec{v_\pi} \wedge \vec{v_r} = (-2, 2, 1) \wedge (2, 3, 1) = (-1, 4, -10)$. Por tanto la recta buscada es $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+2}{-10}$

  Método II

  a) Veamos si el vector dirección de la recta $\vec{u} = (2, 3, 1)$ es combinación lineal de los vectores dirección del plano:

  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ Por tanto la recta y el plano se cortan en un punto.

  b) La recta buscada es paralela a π por tanto su vector director es combinación lineal de $\vec{v} = (1, 0, 2)$ y $\vec{w} = (0, 1, -2)$, es decir $a\vec{v} + b\vec{w} = a(1, 0, 2) + b(0, 1, -2) = (a, b, 2a - 2b)$, como ha de ser perpendicular al dirección de la recta, su producto escalar será cero: $(a, b, 2a - 2b) \cdot (2, 3, 1) = 2a + 3b + 2a - 2b = 4a + b = 0$ por tanto tomando $a = 1, b = -4$ obtenemos un vector que cumple todas la condiciones, es el vector $1\vec{v} - 4\vec{w} = (1, -4, 10)$

  La recta buscada que pasa por $Q = (-1, 0, -2)$ es por tanto $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z+2}{10}$

- CUESTIÓN B3.

  Considere la función dada por $f(x) = \begin{cases} a + \ln(1-x) & si \quad x < 0 \\ x^2 e^{-x} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

  a) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) Determine el valor de a para que la función sea continua en todo R.

selcn Sep 2016 Solución:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (a+\ln(1-x)) ='' a+\ln(+\infty)'' = \infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} ='' \infty \quad e^{-\infty} = \infty \quad 0'' = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} ='' \text{ L'Hôpital } '' = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{e^x} ='' \text{ L'Hôpital } '' = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$

b) Para que sea continua en $x=0$ han de ser iguales los límites $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x^2e^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} (a+\ln(1-x)) = a+\ln 1 = a$

Por tanto es continua para $a=0$

- CUESTIÓN B4.

a) Calcule la siguiente integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\,dx$

b) Obtenga una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \dfrac{x^3+x+1}{x^2+1}$ que cumpla la condición $F(0) = 2$.

selcn Sep 2016 Solución:

a) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\,dx = \int \left(x + \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} + ar\tan x + C$

b) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + ar\tan x + C$, haciendo $F(0) = 2$ resulta: $0+0+C = 2$. la primitiva buscada es $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + ar\tan x + 2$

5.2. Junio 2016

- CUESTIÓN A1.

  Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

  a) Compruebe que ambas matrices son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.

  b) Determine la matriz X que cumple la ecuación $A\,X\,B = A + B$.

  selcn Jun 2016 Solución:

  a) Para que una matriz tenga inversa el determinante ha de ser distinto de 0.

  $|A| = 4 + 2 = 6; \quad |B| = 4 - 6 = -2$

  La inversa es la adjunta de la traspuesta dividida por el determinante:

  Hallamos $A^{-1}; |A| = 8; \quad A^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$

  $B^{-1}; |B| = -2; \quad B^t = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad adj(B^t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ -3/2 & -2 \end{pmatrix}$

  b) Resolvemos la ecuación $AXB = A + B; \quad A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}(A+B)B^{-1}$

  $X = A^{-1}(A+B)B^{-1} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -16 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$
  $-\dfrac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 20 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -5/3 & -4/3 \end{pmatrix}$

- CUESTIÓN A2.

  Considere los puntos $P = (2, 7, 3), Q = (1, 2, 5)$ y $R = (-1, -2, 5)$.

  a) Calcule el área del triángulo PQR.

  b) Determine la ecuación general (o ímplícita) del plano que contiene al triángulo PQR.

  c) Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) de la recta que pasa por P, está contenida en el plano que contiene al triángulo PQR y es perpendicular al lado QR.

  selcn Jun 2016 Solución:

  a) El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores $\vec{RP} = (3, 9, -2), \vec{RQ} = (2, 4, 0)$, que viene dada por el módulo de su producto vectorial:

  $$\vec{RP} \wedge \vec{RQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}$$

  Área triángulo $= \dfrac{1}{2}\sqrt{8^2 + 4^2 + 6^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{116} = \dfrac{1}{2}2\sqrt{29} = \sqrt{29} \quad u^2$

  b) Ya tenemos un vector ortogonal al plano el $(8, -4, -6)$ y como solo necesitamos la dirección lo acortamos $\vec{v} = (4, -2, -3)$, por tanto el plano es $\pi : 4x - 2y - 3z + D = 0$, hacemos que pase por $Q = (1, 2, 5)$: $4 - 4 - 15 + D = 0; \quad D = 15$. El plano por PQR es $\pi : 4x - 2y - 3z + 15 = 0$

c) La recta buscada r es perpendicular al vector $\vec{v} = (4,-2,-3)$ ortogonal de π y al vector $\vec{RQ} = (2,4,0)$, por tanto su vector dirección viene dado por $\vec{v} \wedge \vec{RQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 12\vec{i} - 6\vec{j} + 20\vec{k}$ Tomamos como vector dirección de r el $(6,-3,10)$

Las ecuaciones paramétricas son: $r : \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = 7 - 3t \\ z = 3 + 10t \end{cases}$

- CUESTIÓN A3.

  Calcule los siguientes límites:

  a) $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x} \right) =$

  b) $\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} =$

  selcn Jun 2016 Solución:

  a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x} = \left\{ \dfrac{0}{0} \text{ operando con el conjugado} \right\} = \lim_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x})(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} =$
  $\lim_{x \to 0} \dfrac{(4+x) - (4-x)}{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \to 0} \dfrac{2x}{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$

  b) $\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \left\{ \dfrac{0}{0} \text{ L'Hôpital} \right\} = \lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\cos x - 2 \operatorname{sen} x \cos x}{-2 \cos x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to \pi/2} \dfrac{1 - 2 \operatorname{sen} x}{-2 \operatorname{sen} x} = \dfrac{1}{2}$

- CUESTIÓN A4.

  a) Calcule la siguiente integral indefinida $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx$

  b) Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, y la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

  selcn Jun 2016 Solución:

  a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx = \{ \text{ es potencial} \} = \int (2x+1)(x^2+x+1)^{-2} dx = \frac{(x^2+x+1)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x^2+x+1} + C$

  b) Como la función es siempre positiva en el intervalo de integración el área viene dada por la integral definida:

  $$S = \int_0^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx = \left[\frac{-1}{x^2+x+1} \right]_0^2 = \frac{-1}{4+2+1} - \frac{-1}{1} = \frac{-1}{7} + 1 = \frac{6}{7} \quad u^2$$

- CUESTIÓN B1.

  Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

  $$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ ax + 2z = 0 \\ ay - z = a \end{cases}$$

a) Determine para que valores del parámetro a el sistema tiene solución única. Calcule dicha solución para $a = 1$.

b) Determine para que valor del parámetro a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para que valor del parámetro a el sistema no tiene solución.

selcn Jun 2016 Solución:

Primero estudiamos el sistema, para ello hacemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = a^2 + a$ que se anula para: $a = 0, a = -1$

- Para $a \neq 0$ y $a \neq -1$ $\quad rango(M) = 3 = rango(A) =$ número de incógnitas, sistema compatible determinado.
- Para $a = 0$ la matriz ampliada es
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ es evidente que el rango de M y de A es 2 por tanto
  Para $a = 0, \quad rango(M) = 2 = rango(A) < 3 =$ número de incógnitas, sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones dependientes de un parámetro.
- Para $a = -1$ la matriz ampliada es
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, el menor: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$
  por tanto
  Para $a = -1, \quad rango(M) = 2 < 3 = rango(A)$ sistema incompatible.

a) Para $a = 1$ el sistema es compatible determinado: $\left\{ \begin{array}{c} x + 3y + z = 5 \\ x + 2z = 0 \\ y - z = 1 \end{array} \right. \quad , |M| = 2$

por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-4}{2} = -2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

b) Como hemos visto para $a = 0$ tiene infinitas soluciones dependientes de un parámetro, el sistema queda:

$\left\{ \begin{array}{c} x + 3y + z = 5 \\ +2z = 0 \\ -z = 0 \end{array} \right. \quad ; z = 0; \quad x = 5 - 3y$. Por tanto la solución es $x = 5 - 3t, y = t, z = 0; t \in R$

c) Por lo ya estudiado el sistema no tiene solución para $a = -1$

- CUESTIÓN B2.

Considere los puntos $P = (1, 0, 0), Q = (0, 2, 0) y R = (0, 0, 1)$.

a) Estudie si el triángulo PQR es o no rectángulo en el vértice P.

b) Dado el punto $S = (1, 2, 3)$, calcule el volumen del tetraedro de vertices P, Q, R y S.

selcn Jun 2016 Solución:

a) Consideramos los vectores $\vec{PQ} = (-1, 2, 0), \quad \vec{PR} = (-1, 0, 1)$

Como el producto escalar $\vec{PQ} \cdot \vec{PR} = 1 \neq 0$ concluimos que no son ortogonales, por tanto el triángulo no es rectángulo en P.

b) Es el volumen del tetraedro que determinan los vectores $\vec{PQ}, \vec{PR}, \vec{PS} = (0, 2, 3)$, que es el producto mixto dividido por seis.

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}u^3$$

- CUESTIÓN B3.

El numero de personas, medido en miles, afectadas por una enfermedad infecciosa viene dado por la función

$f(x) = \dfrac{90x}{x^2 + 2x + 9}$, donde x es el tiempo transcurrido, medido en dias, desde que se inicio el contagio.

a) ¿Cual es el numero de personas enfermas el cuarto día?

b) ¿Que día se alcanza el máximo numero de personas enfermas? ¿Cual es ese numero máximo?.

c) ¿Puede afirmarse que la enfermedad se irá erradicando con el paso del tiempo? Razone la respuesta.

selcn Jun 2016 Solución:

a) Es $f(4) = \dfrac{90 \cdot 4}{4^2 + 2 \cdot 4 + 9} = \dfrac{120}{11} = 10'9 \approx 11$ mil

b) Derivamos: $f'(x) = \dfrac{90x^2 - 810}{(x^2 + 2x + 9)^2} = 0; \quad 90x^2 - 810 = 0; \quad x^2 = 9; x = \pm 3,$

x		3	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$
		MÁXIMO	

$f(3) = \dfrac{45}{4}$, exactamente 11250 personas es el númmero máximo.

c) Tenemos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{90x}{x^2 + 2x + 9} = 0$ pues el infinito de denominador es más potente, se podría hacer más explícito dividiendo numerador y denominador por x.

Por tanto se puede afirmar que la enfermedad se erradicará con el paso del tiempo.

- CUESTIÓN B4.

a) Calcule la siguiente integral indefinida $\displaystyle\int x^2\, e^x\, dx$

b) Obtenga una primitiva $F(x)$ de la funcion $f(x) = x^2\, e^x$ que cumpla la condición $F(0) = 1$.

selcn Jun 2016 Solución:

a) Es integral por partes $\int x^2 e^x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array} \right\} = x^2 e^x - \int 2xe^x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = 2x & du = 2dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array} \right\} =$ $x^2 e^x - \left[2xe^x - \int 2e^x dx \right] = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

b) $F(0) = 2e^0 + C = 2 + C = 1; \quad C = -1$, la primitiva buscada es $F(x) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - 1$

Selectividad Matemáticas II (Murcia) 6

Año 2015

6.1. Septiembre 2015

- CUESTIÓN A1.

  Considere las siguientes matrices:

  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  a) Calcule $C = A^t \cdot A - B \cdot B^t$, donde A^t y B^t denotan, respectivamente, las matrices traspuestas de A y B.

  b) Halle una matriz X tal que $X \cdot C = D$, siendo $D = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

  selcn Sep 2015 Solución:

  a) $C = A^t \cdot A - B \cdot B^t =$

  $$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

  b) $X \cdot C = D; \quad X = D \cdot C^{-1}$

  Hallamos $C^{-1}; |C| = -2; \quad C^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad adj(C^t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

  $$X = D \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- CUESTIÓN A2.

  Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por el vértice de un triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

  a) Calcule los puntos medios de los tres lados del triángulo de vértices $A = (5, 3, 6), B = (-1, -1, 2)$ y $C = (5, 7, 4)$.

b) Calcule las ecuaciones de las tres medianas de dicho triángulo.

c) Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

$A=(5,3,6), B=(-1,-1,2)$ y $C=(5,7,4)$ selcn Sep 2015 Solución:

a) Punto medio de $\bar{AB} = M_{AB} = (2,1,4)$

Punto medio de $\bar{AC} = M_{AC} = (5,5,5)$

Punto medio de $\bar{BC} = M_{BC} = (2,3,3)$

b) Mediana de A: punto $A=(5,3,6)$, vector dirección $\vec{M_{BC}A} = (3,0,3)$; tomamos $(1,0,1)$ $\quad m_A = \begin{cases} x=5+t \\ y=3 \\ z=6+t \end{cases}$

Mediana de B: punto $B=(-1,-1,2)$, vector dirección $\vec{M_{AC}B} = (6,6,3)$; tomamos $(2,2,1)$ $\quad m_B = \begin{cases} x=-1+2s \\ y=-1+2s \\ z=2+s \end{cases}$

Mediana de C: punto $C=(5,7,4)$, vector dirección $\vec{M_{AB}C} = (3,6,0)$; tomamos $(1,2,0)$ $\quad m_C = \begin{cases} x=5+v \\ y=7+2v \\ z=4 \end{cases}$

c) Hallemos el posible punto de corte igualando la última coordenada "z" y comprobemos que cumple todas las igualdades:

$\begin{cases} 2+s=4 \\ 6+t=4 \end{cases}$ resulta $t=-2; s=2$

Resulta el punto donde se cortan $(3,3,4)$ del que se deduce que $v=-2$ y pertenece a todas las medianas.

- CUESTIÓN A3.

Calcule los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-6}{x+1}\right)^{\frac{x^2+5}{x+3}} =$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right) =$

selcn Sep 2015 Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-6}{x+1}\right)^{\dfrac{x^2+5}{x+3}} = \{1^\infty\} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+5}{x+3}\right)\cdot\left(\frac{x-6}{x+1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+5}{x+3}\right)\cdot\left(\frac{x-6-x-1}{x+1}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+5}{x+3}\right)\cdot\left(\frac{-7}{x+1}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-7x^2-35}{x+^2+4x+3}} = e^{-7}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1-x}{x^2} = \left\{\frac{1}{0^+}\right\} = +\infty$

- CUESTIÓN A4.

a) Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \tan^2(x)\,dx$

b) De todas las primitivas de la función $f(x) = \tan^2(x)$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas $(\pi/4, 1)$.

selcn Sep 2015 Solución:

a) Se utiliza la fórmula de trigonometría: $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$\int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \tan x - x + C$$

b) $F(X) = \tan x - x + C; \quad F(\frac{\pi}{4}) = 1; \tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + C = 1; 1 - \frac{\pi}{4} + C = 1; \quad C = \frac{\pi}{4}$

La primitiva es $F(X) = \tan x - x + \dfrac{\pi}{4}$

- CUESTIÓN B1.

Se dice que una matriz cuadrada A es **idempotente** si cumple que $A^2 = A$.

a) SiA es una matriz idempotente, calcule razonadamente A^{2015}.

b) Determine para qué valores de los parámetros a y b la siguiente matriz es idempotente

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

selcn Sep 2015 Solución:

a)$A^2 = A; \quad A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A; \quad A^{2015} = A$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 & -2a^2 & 0 \\ -2a^2 & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$

Para que sea idempotente tiene que ser :

$2a^2 = a; 2a^2 - a = 0; \quad \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} ; \quad b^2 = b; b^2 - b = 0; \quad \begin{cases} b = 0 \\ b = 1 \end{cases}$

- CUESTIÓN B2.

Considere la recta r y el plano π dados por las ecuaciones siguientes

$r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-2}{5}$ y $\pi : x - 2y + z = -3$

a) Compruebe que la recta r es paralela al plano π y calcule la distancia entre ellos.

b) Determine la recta que pasa por el punto $P = (1, 0, 2)$ y es perpendicular al plano π. Calcule la intersección de dicha recta con el plano π.

selcn Sep 2015 Solución:

Vamos a obtener un punto y un vector dirección de la recta: $r: \begin{cases} Q(1,0,2) \\ \vec{v} = (3,4,5) \end{cases}$

Además el vector $\vec{w} = (1, -2, 1)$ es ortogonal a π.

a) El producto escalar $\vec{v} \cdot \vec{w} = 3 - 8 + 5 = 0$ indica que el vector ortogonal a π es ortogonal a r, luego r y π son paralelos o coincidentes.

Para hallar la distancia de r y π basta hallar la distancia de un punto de r a π.

$d(r,\pi)=d(Q,\pi)=\left|\dfrac{1+2+3}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}\right|=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$, luego son paralelos

b) La recta s que pasa por $P=(1,0,2)$ buscada tiene como vector dirección a $\vec{w}=(1,-2,1)$, luego en paramétricas es: $s:\begin{cases} x=1+t \\ y=0-2t \\ z=2+t \end{cases}$

Para hallar la intersección de s con π, sustituimos s en π: $\quad 1+t-2(-2t)+2+t=-3; \quad 6t=-6; t=-1$, el punto intersección se obtiene sustituyendo en r, $s:\begin{cases} x=1-1=0 \\ y=2 \\ z=2-1=1 \end{cases}$ El punto de intersección de s y π es $(0,2,1)$

- CUESTIÓN B3.

  Calcule los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:

  a)$f(x)=x\ln(x)$, con $x>0$.

  b) $g(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$, con $x\in R$.

  selcn Sep 2015 Solución:

  a) $f'(x)=\ln(x)+1=0, \quad x=1/e,$

x		$\frac{1}{e}$	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$

  Sustituyendo $f(1/e)=-1/e$ resulta que hay un máximo en $(1/e,-1/e)$

  b) $g'(x)=(2x-x^2)e^{-x}, \quad x=0, x=2,$

x		0		2	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$	MÍNIMO	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$

  Sustituyendo $g(0)=0, \quad g(2)=\dfrac{4}{e^2}$ resulta que hay mínimo en $(0,0)$ y máximo en $(2,\dfrac{4}{e^2})$

- CUESTIÓN B4.

  a) Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx$

  b) De todas las primitivas de la función $f(x)=\ln(1+x^2)$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas $(0,-2)$.

  selcn Sep 2015 Solución:

  a) $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx=\left\{\begin{array}{l} u=\ln(1+x^2); \quad du=\dfrac{2x}{1+x^2}\,dx \\ dv=dx; \quad v=x \end{array}\right\}=x\ln(1+x^2)-\int\dfrac{2x^2}{1+x^2}\,dx=$ dividiendo: cociente = 2 resto = -2 $=$

  $x\ln(1+x^2)-\displaystyle\int\left(2-\dfrac{2}{1+x^2}\right)dx=x\ln(1+x^2)-2x+2\,ar\tan x+C$

b) Buscamos que $F(x) = x\,\ln(1+x^2) - 2x + 2\,ar\tan x + C$ pase por el punto $(0, -2)$

$F(0) = 0 + C = -2$ La primitiva buscada es $F(x) = x\,\ln(1+x^2) - 2x + 2\,ar\tan x - 2$

6.2. Junio 2015

- CUESTIÓN A1.

a) Discuta, en función del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=a \\ ax+y+z=1 \end{cases}$$

b) Si es posible, resuélvalo para el valor de $a=-2$.

selcn Jun 2015 Solución:

Hacemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^3+3a-2$ que se anula para: $a=-2, a=1$

- Para $a \neq -2$ y $a \neq 1$ $rango(M) = 3 = rango(A) =$ número de incógnitas, sistema compatible determinado.
- Para $a=1$ el sistema queda $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ es evidente que el rango de M y de A es 1 por tanto

  Para $a=1$, $rango(M) = 1 = rango(A) < 3 =$ número de incógnitas, sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones dependientes de dos parámetros.
- Para $a=-2$ la matriz ampliada es

  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, el menor: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

  por tanto

  Para $a=-2$, $rango(M) = 2 = rango(A) < 3 =$ número de incógnitas, sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones dependientes de un parámetro.

b) Para $a=-2$ queda el sistema: $\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=0 \\ y+z=1 \end{cases}$, de solución: $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$

- CUESTIÓN A2.

Tres de los cuatro vértices de un tetraedro son los puntos $A=(2,1,0), B=(3,4,0)$ y $C=(5,1,0)$. El cuarto vértice D está en la recta r que pasa por el punto $(1,2,3)$ y tiene como vector director el vector $(-1,1,1)$.

a) Determine las ecuaciones paramétricas de la recta r.

b) Calcule las coordenadas del vértice D para que el volumen del tetraedro sea 9.

selcn Jun 2015 Solución:

a) $r: \begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=3+t \end{cases} \quad t \in R$

b) El tetraedro de vértices A, B, C, D viene dado por los vectores $\vec{AD} = (1-t-2, 2+t-1, 3+t) = (-1-t, 1+t, 3+t)$, $\vec{AB} = (1,3,0)$, $\vec{AC} = (3,0,0)$

El volumen viene dado por $V = \dfrac{1}{6}|[\vec{AD}; \vec{AB}, \vec{AC}]|$

$$[\vec{AD}; \vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{vmatrix} -1-t & 1+t & 3+t \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -27-9t$$

luego $|-27-9t| = 6\cdot 9; \pm(-27-9t) = 54$ $\left\{ \begin{array}{l} -27-9t = 54 \\ 27+9t = 54 \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} t = -9 \\ t = 3 \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} D(10,-7,-6) \\ D'(-2,5,6) \end{array} \right.$

- CUESTIÓN A3.

  a) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$

  b) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$

  c) ¿Es continua la función $f(x) = \dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$ en $x=0$? Justifique la respuesta.

  selcn Jun 2015 Solución:

  a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}} = \left\{ \frac{2+e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}} = \frac{2+0}{1+0} \right\} = 2$

  b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\infty}{\infty} \\ \text{L'Hôpital} \end{array} \right\} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}\frac{-1}{x^2}}{e^{2/x}\frac{-2}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{2e^{2/x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{2(e^{1/x})^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2e^{1/x}} = \left\{ \frac{1}{\infty} \right\} = 0$

  c) Los límites laterales en $x=0$ no coinciden y la función no está definida en $x=0$, hay discontinuidad de salto finito.

- CUESTIÓN A4. a) Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int 2x\ ar\tan x\ dx$

  b) De todas las primitivas de la función $f(x) = 2x\ ar\tan x$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas $(0,-2)$.

  selcn Jun 2015 Solución:

  a) $\displaystyle\int 2x\ ar\tan x\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = ar\tan x; & du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ dv = 2xdx; & v = x^2 \end{array} \right\} = x^2 ar\tan x - \int \frac{x^2}{1+x^2}dx = x^2 ar\tan x - \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = x^2 ar\tan x - x + ar\tan x + C$

  b) Buscamos que $F(x) = x^2 ar\tan x - x + ar\tan x + C$ pase por el punto $(0,-2)$

  $F(0) = 0\,ar\tan 0 - 0 + ar\tan 0 + C = -2; \quad 0 + C = -2; C = -2$

  La primitiva pedida es $F(x) = x^2 ar\tan x - x + ar\tan x - 2$

- CUESTIÓN B1.

  Se dice que una matriz cuadrada A es involutiva si cumple que $A^2 = I$, donde I denota la matriz identidad.

a) Justifique razonadamente que toda matriz involutiva es regular (o invertible).

b) Determine para qué valores de los parámetros a y b la siguiente matriz es involutiva

$$\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

selcn Jun 2015 Solución:

a) Una matriz tiene inversa cuando su determinante no es 0. Como el determinante del producto de dos matrices cuadradas es el producto de los determinantes $|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = |A|^2 = |I| = 1$ pone de manifiesto que en una matriz involutiva $|A| \neq 0$

b) $A \cdot A = I$

$$\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $2a^2 = 1, a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \quad b^2 = 1; b = \pm 1$

- CUESTIÓN B2.

Considere la recta r y el plano π dados por las ecuaciones siguientes:

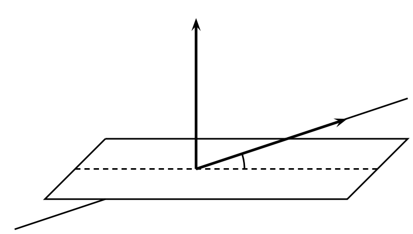
$$r : \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2} \qquad \text{y} \qquad \pi : 2x + y + z = -7$$

a) Compruebe que la recta r corta al plano π y calcule el ángulo que forman.

b) Determine el plano que pasa por el punto $P = (2, -3, 3)$, es paralelo a la recta r y es perpendicular al plano π.

selcn Jun 2015 Solución:

a) Un vector dirección de la recta r es $\vec{v} = (1, -1, 2)$; un vector ortogonal al plano π es $\vec{w} = (2, 1, 1)$, el producto escalar de los dos es $\vec{v} \cdot \vec{w} = 2 - 1 + 2 = 3$, luego no son ortogonales por tanto la recta no es paralela al plano y en consecuencia podemos afirmar que se cortan.



Veamos el ángulo $\cos(\alpha') = \left| \dfrac{\vec{v}.\vec{w}}{|\vec{v}|.|\vec{w}|} \right| = \left| \dfrac{3}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} \right| = \dfrac{1}{2}; \quad ar\cos\dfrac{1}{2} = 60^0$

El ángulo es es complementario $\widehat{r, \pi} = 90 - 60 = 30^0$

b) El plano que pasa por el punto $P = (2, -3, 3)$, es paralelo a la recta r y es perpendicular al plano π. viene dado por:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3x + 3y + 3z + 6 = 0. \text{ El plano buscado es } x - y - z = 2$$

- CUESTIÓN B3.

  Considere la función dada por: $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 3 & si \quad x \leq 1 \\ \ln(x^2) + b & si \quad x > 1 \end{cases}$

  Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función $f(x)$ es continua y derivable en todo R.

  selcn Jun 2015 Solución:

  Es continua y derivable siempre por ser resultado de operaciones entre funciones continuas y derivables en sus trozos salvo quizá donde se parte el dominio que es en $x = 1$, vamos a estudiar los límites laterales:

  $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 + ax - 3) = a - 2$

  $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x^2) + b = b$

  Como $f(1) = a - 2$, para que sea continua ha de ser $a - 2 = b$

  Veamos los límites laterales en $x = 1$ de la función derivada para que coincidan:

  $f'(x) = \begin{cases} 2x + a & si \quad x \leq 1 \\ \frac{2x}{x^2} & si \quad x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 2x + a & si \quad x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & si \quad x > 1 \end{cases}$

  $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 2x + a = 2 + a$

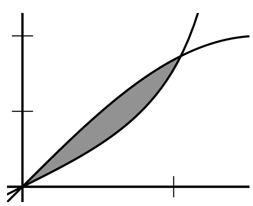
  $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{x} = 2$

  Para que coincidan $a = 0$, por tanto para que sea continua $b = -2$ y entonces:

  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & si \quad x \leq 1 \\ \ln(x^2) - 2 & si \quad x > 1 \end{cases}$ es continua y derivable en todo R.

- CUESTIÓN B4.

  Considere el recinto limitado por la gráfica de las funciones $f(x) = 2\,\text{sen}\, x$ y $g(x) = \tan x$ en el primer cuadrante del plano XY de la figura.

  a) Determine los puntos de corte de dichas gráficas.

  b) Calcule el área de dicho recinto.

  selcn Jun 2015 Solución:

  a) $2\,\text{sen}\, x = \tan x; \quad 2\,\text{sen}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}; \quad 2\,\text{sen}\, x - \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} = 0; \quad \text{sen}\, x(2 - \dfrac{1}{\cos x}) = 0$

  $\text{sen}\, x = 0; \quad x = 0$

  $2 - \dfrac{1}{\cos x} = 0; \quad \cos x = \dfrac{1}{2}; \quad x = \dfrac{\pi}{3}$

  b) $S = \displaystyle\int_0^{\pi/3} (f - g)\, dx = \int_0^{\pi/3} 2\,\text{sen}\, x - \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}\, dx = [-2\cos x + \ln|\cos x|]_0^{\pi/3} = -2\cos(\pi/3) + \ln(\cos(\pi/3)) -$
  $(-2\cos 0 + \ln(\cos 0)) = -2\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{1}{2} + 2 - \ln 1 = 1 + \ln\dfrac{1}{2} = 0'3068$

Selectividad Matemáticas II (Murcia) 7

Año 2014

7.1. Septiembre 2014

- CUESTIÓN A1.

  a) Compruebe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, es regular (o inversible) y calcule su matriz inversa.

  b) Resuelva la ecuación matricial $AXA = B$, siendo A la matriz anterior y $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

  ¡OJO!: El producto de matrices NO es conmutativo.

  selcn Sep 2014 Solución:

  a) Una matriz es invertible si su determinante no es cero, en nuestro caso: $|A| = -3+2 = -1 \neq 0$

  La matriz inversa es la adjunta de la traspuesta dividida por el determinante de la matriz: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}[adj(A^t)]$

  $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; $\quad adj(A^t)\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

  b) Primero despejamos X: $AXA = B$; $\quad AXA \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$; $\quad AX = B \cdot A^{-1}$; $\quad A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$; $\quad X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$

  $A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -7 \\ -13 & 5 \end{pmatrix}$

  $A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 18 & -7 \\ -13 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 & 25 \\ -49 & -18 \end{pmatrix}$

- CUESTIÓN A2.

  a) Estudie la posición relativa de las rectas r y s en función del parámetro a:

  $$r : \begin{cases} x + 3y = 8 \\ 4y + z = 10 \end{cases} \qquad s : \frac{x}{7} = \frac{y}{a-4} = \frac{z+6}{5a-6}$$

  b) Para el valor del parámetro $a = 4$ determine, si es posible, el punto de corte de ambas rectas.

selcn Sep 2014 Solución:

Vamos a obtener un punto y un vector dirección de cada recta:

$r : \left\{ \begin{array}{l} x+3y=8 \\ 4y+z=10 \end{array} \right.$ resolviendo el sistema dejando y como parámetro: $r : \left\{ \begin{array}{l} x=8-3y \\ y=y \\ x=10-4y \end{array} \right.$ por tanto:

$r : \left\{ \begin{array}{l} P(8,0,10) \\ \vec{v}=(-3,1,-4); \text{ o mejor } \vec{v}=(3,-1,4) \end{array} \right.$ $\quad s : \left\{ \begin{array}{l} Q(0,0,-6) \\ \vec{w}=(7,a-4,5a-6) \end{array} \right.$

Estudiamos el rango de la matriz formada por los dos vectores:

$\left(\begin{array}{ccc} 3 & -1 & 4 \\ 7 & a-4 & 5a-6 \end{array} \right)$ Anulamos los dos menores: $\left| \begin{array}{cc} 3 & -1 \\ 7 & a-4 \end{array} \right| = 3a-12+7=0; a=\frac{5}{3};$ $\left| \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 7 & 5a-6 \end{array} \right| = 15a-18-28=0; a=\frac{46}{15}$

Por tanto $\forall a \in R$ el rango es dos, nunca son paralelos, por tanto las rectas se cruzan o se cortan.

(También se podría haber visto que la proporcionalidad de los vectores: $\frac{3}{7}=\frac{-1}{a-4}=\frac{4}{5a-6}$ es imposible para cualquier valor de a)

Para que se corten ha de ser $ran(\vec{QP},\vec{v},\vec{w})=2$. Basta anular el determinante de la matriz que forman: $\left| \begin{array}{ccc} 5 & 1 & 12 \\ 3 & -1 & 4 \\ 7 & a-4 & 5a-6 \end{array} \right| = -24a+96=0; a=4$

Resumiendo: Para $a=4$, las rectas se cortan; para $a \neq 4$ las rectas se cruzan.

b) Para $a=4$, la recta s queda: $s : \left\{ \begin{array}{l} x=7t \\ y=0 \\ z=-6+14t \end{array} \right.$

Que sustituyendo en la primera igualdad de r resulta: $7t=8; \quad t=\frac{8}{7}$, sustituyendo este valor en s obtenemos:

$s : \left\{ \begin{array}{l} x=8 \\ y=0 \\ z=-6+16 \end{array} \right.$.

El punto de corte de las dos rectas es $(8,0,10)$

- CUESTIÓN A3.

  Dada la función $f(x)=ax+b\sqrt{x}$, determine los valores de los parámetros a y b sabiendo que $f(x)$ cumple las siguientes propiedades:

  a) $f(x)$ alcanza su máximo en el punto de abscisa $x=100$;

  b) La gráfica de $f(x)$ pasa por el punto $(49,91)$.

  selcn Sep 2014 Solución:

  a) $f'(x)=a+\frac{b}{2\sqrt{x}}; \quad f'(100)=0; \quad a+\frac{b}{2\sqrt{100}}=0; 20a+b=0$

  b) $f(49)=91; \quad 49a+b\sqrt{49}=91; \quad 49a+7b=91$

  Despejando b en la primera y sustituyendo en la segunda queda: $49a-7\cdot 20a=91; \quad -91a=91; \quad a=-1.$

  Resulta: $f(x)=-x+20\sqrt{x}$

- CUESTIÓN A4.

  a) Calcule la integral indefinida $\int ar\tan x\, dx$

  b) De todas las primitivas de la función $f(x) = ar\tan x$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas $(0, 3)$.

  selcn Sep 2014 Solución:

  a) $\int ar\tan x\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = ar\tan x; & du = \dfrac{1}{1+x^2}\, dx \\ dv = dx; & v = x \end{array} \right\} = x\, ar\tan x - \int \dfrac{x}{1+x^2}\, dx = x\, ar\tan x - \dfrac{1}{2} \int \dfrac{2x}{1+x^2}\, dx =$
  $x\, ar\tan x - \dfrac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$

  b) Buscamos que $F(x) = x\, ar\tan x - \dfrac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ pase por el punto $(0, 3)$

  $F(0) = 0\, ar\tan 0 - \dfrac{1}{2} \ln(1+0^2) + C = 3; \quad -\dfrac{1}{2} \ln 1 + C = 3; C = 3$

  La primitiva pedida es $F(x) = x\, ar\tan x - \dfrac{1}{2} \ln(1+x^2) + 3$

- CUESTIÓN B1.

  a) Discuta, en función del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones:

  $$\left\{ \begin{array}{c} ax + 2z = 0 \\ ay - z = a \\ x - y + z = 0 \end{array} \right.$$

  b) Si es posible, resuélvalo para el valor de $a = 0$.

  selcn Sep 2014 Solución:

  Hacemos el determinante de la matriz de coeficientes:

  $|M| = \begin{vmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 3a$ que se anula para: $a = 0, a = 3$

  - Para $a \neq 0$ y $a \neq 3$ $\;rango(M) = 3 = rango(A) =$ número de incógnitas, sistema compatible determinado.
  - Para $a = 0$ la matriz ampliada es

    $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, es evidente que el rango de M y de A es 2 por tanto

    Para $a = 0$, $\quad rango(M) = 2 = rango(A) < 3 =$ número de incógnitas, sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones dependientes de un parámetro.
  - Para $a = 3$ la matriz ampliada es

    $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, el menor: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$

    por tanto el rango de M es 2 y el de A es 3 luego:

    Para $a = 1$, $\quad rango(M) = 2 < 3 = rango(A)$, sistema incompatible.

b) Para $a = 0$ queda el sistema: $\left\{\begin{array}{c} 0 + 2z = 0 \\ 0 - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right.$

de solución: $z = 0, y = x$; o sea: $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = t \qquad t \in R \\ z = 0 \end{array}\right.$

- CUESTIÓN B2.

Considere la recta r y el plano π dados por las ecuaciones siguientes:

$r : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+4}{-4} = \dfrac{z+1}{0} \qquad$ y $\qquad \pi : 7x - y = 8$

a) Compruebe que la recta r corta al plano π y calcule el ángulo que forman.

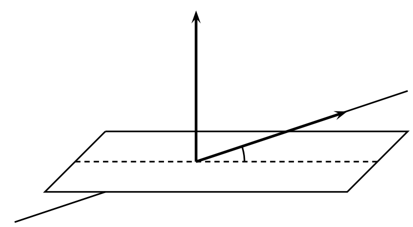
b) Determine el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

selcn Sep 2014 Solución:

a) Un vector dirección de la recta r es $\vec{v} = (3, -4, 0)$; un vector ortogonal al plano π es $\vec{w} = (7, -1, 0)$, el producto escalar de los dos es $\vec{v} \cdot \vec{w} = 21 + 4 = 25$, luego no son ortogonales por tanto la recta no es paralela al plano y en consecuencia podemos afirmar que se cortan.

Veamos el ángulo $\cos(\alpha') = \left|\dfrac{\vec{v}.\vec{w}}{|\vec{v}|.|\vec{w}|}\right| = \left|\dfrac{25}{\sqrt{25}.\sqrt{50}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \quad ar\cos\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 45^0$

El ángulo es es complementario $\widehat{r,\pi} = 90 - 45 = 45^0$



b) El plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π viene dado por:

$\begin{vmatrix} x-2 & y+4 & z+1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (z+1)(-3+28) = 0$. El plano buscado es $z = -1$

- CUESTIÓN B3.

Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3}{x-5} - \dfrac{x^2}{x-2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x + 1 - x}{(x-1)^2} =$

selcn Sep 2014 Solución:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3}{x-5} - \dfrac{x^2}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-2)(x^2-3) - x^2(x-5)}{(x-5)(x-2)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-3x-6}{x^2-7x+10} = 3$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x + 1 - x}{(x-1)^2} = \left\{\begin{array}{l}\frac{0}{0} \\ \text{L'Hôpital}\end{array}\right\} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x + \frac{x}{x} - 1}{2(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{2(x-1)} = \left\{\begin{array}{l}\frac{0}{0} \\ \text{L'Hôpital}\end{array}\right\} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{2} = \dfrac{1}{2}$

- CUESTIÓN B4.

  a) Encuentre una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

  b)Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas entre $x = \frac{1}{e}$ y $x = e$

  selcn Sep 2014 Solución:

  a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}dx = \int (\ln x)^1 \frac{1}{x}dx = \frac{(\ln x)^2}{2} = \frac{\ln^2 x}{2} + C$

  b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ es negativa en $\left[\dfrac{1}{e}, 1\right)$ y positiva en $(1, e]$, por tanto hay que hacer dos integrales:

  $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} = \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} = \frac{\ln^2 1}{2} - \frac{\ln^2 \frac{1}{e}}{2} = -\frac{(-1)^2}{2} = -\frac{1}{2}$

  $\displaystyle\int_{1}^{e} = \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{1}^{e} = \frac{\ln^2 e}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = \frac{1}{2}$

  Por tanto el área pedida es $S = 1$ u^2

7.2. Junio 2014

- CUESTIÓN A.1:

Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$, calcule, sin desarrollar ni utilizar la regla de Sarrus, los siguientes determinantes, indicando en cada paso qué propiedad de los determinantes se está utilizando.

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+2 & 3z+4 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix}$.

selcn Jun 2014 Solución:

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$ Al multiplicar una fila por un número el determinante queda multiplicado por ese número. $= 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$ Si se permutan entre sí dos filas de un determinante éste cambia de signo. $= -\frac{3}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}\cdot 4 = -6$

b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+2 & 3z+4 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix} =$ 2^a- 1^a . 3 3^a -1^a; Un determinante es igual al que resulta de sumar a una fila una combinación lineal de las restantes, es decir, una suma de esas filas multiplicadas por números. $= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8.$

- CUESTIÓN A.2:

a) Determine para qué valor del parámetro a la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0 \end{array} \right.$ es perpendicular al plano $\pi : -6x+ay+2z=0$.

b) Demuestre que si $a=-8$ la recta r corta al plano π en un punto y calcule dicho punto de corte.

selcn Jun 2014 Solución:

a) La recta viene dada como intersección de planos, pasamos la recta a paramétricas resolviendo el sistema de dos ecuaciones y tres incognitas:

Pasando z al segundo miembro para que quede como parámetro: $r : \left\{ \begin{array}{l} x+y=1-z \\ -x-2y=-z \end{array} \right.$ sumando queda $-y=1-2z; y=-1+2z$, sustituyendo en la primera $x=1-z-y=1-z-(-1+2z)=2-3z$, resulta:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x=2-3t \\ y=-1+2t \\ z=t \end{array} \right.$$

Para que la recta r y el plano π sean perpendiculares el vector dirección de aquella $(-3,2,1)$ y el vector ortogonal de éste $(-6,a,2)$ han de ser paralelos o sea proporcionales: $\dfrac{-6}{-3}=\dfrac{a}{2}=\dfrac{2}{1}$ por tanto la recta r y el plano π son perpendiculares cuando $a=4$

b) Sustituimos las paramétricas de r en la ecuación de $\pi: -6x-8y+2z=0$

$-6(2-3t)-8(-1+2t)+2t=0$ resulta $t=1$; sustituyendo en las paramétricas resulta que el punto de corte es $(-1,1,1)$

- CUESTIÓN A.3:

  Dada la función $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$, se pide:

  a) Dominio de definición y cortes con los ejes.

  b) Estudio de las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).

  c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos (máximos y mínimos).

  d) Representación gráfica aproximada.

  selcn Jun 2014 Solución:

  a) Dominio de definición $R-\{0\}$

  cortes con eje $OX:\quad y=0;\frac{e^x}{x}$ nunca se anula, no hay.

  corte con eje $OY:\quad x=0$ no hay.

  b) Estudio de las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).

  Verticales:

  $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x}{x}=-\infty$

  $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{x}=\infty$

  Asíntota vertical $x=0$

  Horizontales: $y=n$

  $n=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}=\left\{\begin{array}{l}\frac{\infty}{\infty}\\ \text{L'Hôpital}\end{array}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{1}=\infty$, no hay por la derecha

  $n=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=\dfrac{0}{-\infty}=0$ asíntota horizontal $y=0$ por la izquierda.

  Como lo dice explícitamente veamos oblicua por la derecha que sería la única posibilidad pues por la izquierda hay horizontal: $y=mx+n$

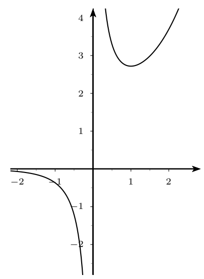
  $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=\left\{\begin{array}{l}\frac{\infty}{\infty}\\ \text{L'Hôpital}\end{array}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{2x}=\infty$, no hay por la derecha

  c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos (máximos y mínimos).

  $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}=0; x=1$

x		1	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$	MÍNIMO	$\nearrow$

d) Representación gráfica aproximada.



- CUESTIÓN A.4:

a) Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \tan x dx$

b) De todas las primitivas de la función $f(x) = \tan x$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas $(0, 2)$.

selcn Jun 2014 Solución:

a) $\displaystyle\int \tan x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \text{ logarítmica } = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$

b) $F(x) = -\ln|\cos x| + C;$ pasa por $(0, 2)$, $F(0) = 2$, $-\ln|\cos 0| + C = 2$, $-\ln 1 + C = 2$, $C = 2$
la primitiva buscada es $g(x) = -\ln|\cos x| + 2$

- CUESTIÓN B.1:

a) Discuta el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} ax + 3y + z = a \\ x + ay + az = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

b) Si es posible, resuélvalo para el valor de $a = -1$.

selcn Jun 2014 Solución:

Hacemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2^2 + 2a + 4 \text{ que se anula para: } a = 2, a = -1$$

- Para $a \neq -1$ y $a \neq 2$ $rango(M) = 3 = rango(A) =$ número de incógnitas, sistema compatible determinado.

- Para $a = -1$ la matriz ampliada es
$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, la última columna es la anterior cambiada de signo, luego el rango de M y de A es 2 por tanto
Para $a = -1$, $rango(M) = 2 = rango(A) < 3 =$ número de incógnitas, sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones dependientes de un parámetro.

- Para $a = 2$ la matriz ampliada es
  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, la última columna es la primera, luego el rango de M y de A es 2 por tanto
  Para $a = 2$, $\quad rango(M) = 2 = rango(A) < 3 =$ número de incógnitas, sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones dependientes de un parámetro.

b) Para $a = -1$ queda: $\left\{ \begin{array}{l} -x + 3y + z = -1 \\ \quad x - y - z = 1 \\ \quad x + y - z = 1 \end{array} \right.$

Restando las dos últimas resulta $-2y = 0$; $\quad y = 0$, pasando z al otro miembro como parámetro, la última queda: $x = 1 + z$, la solución del sistema resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 0 \qquad , t \in R \\ z = t \end{array} \right.$$

- CUESTIÓN B.2:

  Dos de los tres vértices de un triángulo son los puntos $A = (1, 1, 1)$ y $B = (1, 1, 3)$. El tercer vértice C está en la recta r que pasa por los puntos $P = (-1, 0, 2)$ y $Q = (0, 0, 2)$.

  a) Determine la ecuación de la recta r.

  b) Calcule las coordenadas del vértice C para que el área del triángulo sea $\sqrt{15}$ unidades cuadradas.

  Observación: Hay dos soluciones.

  selcn Jun 2014 Solución:

  a) Vector dirección de r : $\quad \vec{PQ} = (1, 0, 0)$; Tomamos como punto $Q \quad r : \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \\ z = 2 \end{array} \right.$

  b) Un punto X de la recta tiene de coordenadas $(t, 0, 2)$ el área del triángulo de vértices A, B, X viene dado por la mitad del módulo del producto vectorial $\vec{AB} \wedge \vec{AX}$

  $$\vec{AB} \wedge \vec{AX} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ t-1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2(-\vec{i} - \vec{j}(t-1)) = 2(\vec{i} + (t-1)\vec{j})$$

  La mitad del módulo es $\dfrac{2\sqrt{1^2 + (t-1)^2}}{2} = \sqrt{15}; \quad 1 + t^2 - 2t + 1 = 15; \left\{ \begin{array}{l} t = 1 - \sqrt{14} \\ t = 1 + \sqrt{14} \end{array} \right.$

  La posibles soluciones son punto $C(1 - \sqrt{14}, 0, 2)$ el punto $C'(1 + \sqrt{14}, 0, 2)$

- CUESTIÓN B.3:

  Dada la función $f(x) = x \ln x - x$, se pide: a) Determine el punto de la gráfica de f para el cual la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante. Calcule la ecuación de dicha recta. b) Determine el punto de la gráfica de f para el cual la recta tangente es paralela al eje OX. Calcule la ecuación de dicha recta.

selcn Jun 2014 Solución:

a) La bisectriz del primer cuadrante es $y = x$, por tanto hemos de buscar el punto donde la derivada valga 1.

$f'(x) = \ln x + x\dfrac{1}{x} - 1 = \ln x = 1$

$f(e) = e\ln e - e = 0$

Por tanto la derivada es paralela a la bisectriz del primer cuadrante en el punto $(e, 0)$.

La recta pedida es : $y = x - e$

b) Buscamos el punto donde la derivada valga 0:

$f'(x) = \ln x + x\dfrac{1}{x} - 1 = \ln x = 0$

$f(1) = 1\ln 1 - 1 = -1$

La recta pedida es : $y = -1$

- CUESTIÓN B.4:

  a) Encuentre una primitiva de la función $f(x) = x\cos x$.

  b) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x\cos x$ y el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = \pi$.

  selcn Jun 2014 Solución:

  a) $\displaystyle\int x\cos x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos x & v = \operatorname{sen} x \end{array} \right\} = x.\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx = x.\operatorname{sen} x + \cos x$

  b) Como la función pasa de positiva a negativa en $\dfrac{\pi}{2}$, integramos cada trozo:

  $S_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = [x.\operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - (0.\operatorname{sen} 0 + \cos 0) = \frac{\pi}{2} - 1$

  $S_2 : \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos x dx = [x.\operatorname{sen} x + \cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \pi.\operatorname{sen}\pi + \cos\pi - (\frac{\pi}{2}.\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}) = -1 - \frac{\pi}{2}; \quad S_2 = \frac{\pi}{2} + 1$

  El área total es: $S = \pi$

7.3. mayores 2014

- CUESTIÓN A.1:

  a) Calcule, utilizando el método que estime más adecuado, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ a & 1 & 4 \\ 1 & 5a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ en función del parámetro a.

  b)Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+3y+3z=0 \\ 2x+y+4z=0 \\ x+10y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

selcn mayores 2014 Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} a| & 2 & 3 \\ a| & 1 & 4 \\ \hline 1 & 5a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ a & 1 & 4 \\ 1 & 5a & 0 \end{vmatrix} = 5-5a^2$ Anulamos: $5-5a^2=0$ para $a=\pm 1$

$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ a & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ Por tanto la 4^a fila es combinación lineal de las dos primeras y la podemos eliminar en al cálculo del rango.

Por tanto:

Para $a \neq \pm 1$ rango 3.

Para $a=1$ rango 2

Para $a=-1$ rango 2

b) El sistema es homogéneo, como hemos visto para $a=2$, el rango de la matriz de coeficientes es 3, igual al número de incógnitas por tanto tiene solo la solución trivial $x=0, y=0, z=0$.

- CUESTIÓN A.2:

  a) Determine la recta que pasa por el punto $P=(1,-1,3)$ y es perpendicular al plano $\pi : \begin{cases} x=3-\lambda+\mu \\ y=-\lambda+\mu \\ z=1+2\lambda-\mu \end{cases} \quad , \quad \lambda,\mu \in R$

  b) Calcule la distancia del punto P al plano π.

  selcn mayores 2014 Solución:

  a) Hallamos primero la ecuación general de π: $\pi : \begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -x+y+3=0$ vector ortogonal: $\vec{v}=(-1,1,0)$

  Recta $r : \begin{cases} x=1-t \\ y=-1+t \\ z=3 \end{cases} \quad t \in R$

  b) Distancia del punto P al plano π, $\quad d(P,\pi) = \left| \dfrac{-1-1+3}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} \right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

- CUESTIÓN A.3:

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

a) Dominio de definición y puntos de corte con los ejes.

b) Estudio de las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

d) Representación gráfica aproximada.

selcn mayores 2014 Solución:

a) Dominio $R - \{2\}$

Corte con OX: $y = 0$, $x = 0$.

Corte con OY el mismo

b) Asíntotas verticales:

en $x = 2$ $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2}{x-2} = +\infty \end{array} \right.$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x-2} = \infty$, no hay

Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$

$m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x(x-2)} = 1$

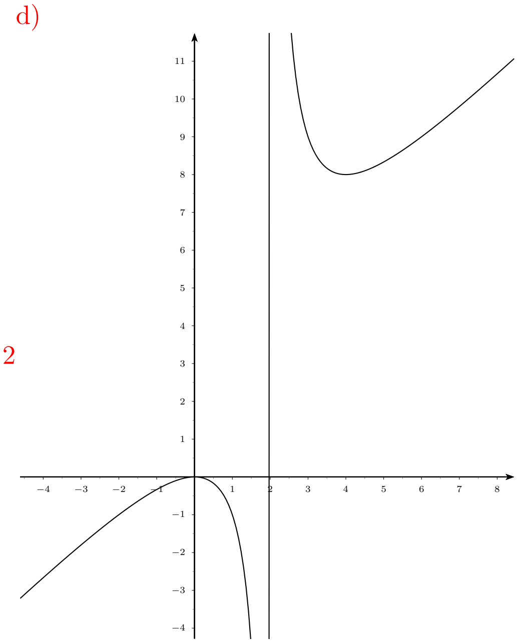
$n = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x-2} - x = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - x^2 + 2x}{x-2} = 2$

Asíntotas oblicuas: $y = x + 2$

c) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$, $\quad x^2 - 4x = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array} \right.$

x		0		4	
y'	$+$		$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		MÁXIMO		MÍNIMO	

d)



- CUESTIÓN A.4:

a) Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int x^2 \ \operatorname{sen} x \, dx$

b) Aplicando el apartado anterior, calcule la integral definida $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \ \operatorname{sen} x \, dx$.

selcn mayores 2014 Solución:

a) Es integral por partes $\displaystyle\int x^2 \ \operatorname{sen} x \ dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \operatorname{sen} x dx & v = -\cos x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx =$
$\left\{ \begin{array}{ll} u = 2x & du = 2dx \\ dv = \cos x dx & v = \operatorname{sen} x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x - 2 \displaystyle\int \operatorname{sen} x dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \ \operatorname{sen} x \ dx = \left[-x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x \right]_0^{\pi/2} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos\frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 2\cos\frac{\pi}{2} - (2\cos 0) =$
$\pi - 2$

- CUESTIÓN B.1:

  Las edades de un hijo, su padre y su abuelo cumplen las siguientes condiciones:

  - La suma de las edades del hijo, del padre y el doble de la del abuelo es 182 años.
  - El doble de la edad del hijo más la edad del abuelo es 100 años.
  - La edad del padre es el doble de la del hijo.

  a) Plantee un sistema de ecuaciones con las condiciones descritas en el enunciado para averiguar la edad de cada uno de ellos.

  b) Resuélvalo.

  selcn mayores 2014 Solución:

  x= edad del hijo, y= edad del padre, z= edad del abuelo

  $$\left\{\begin{array}{c} x+y+2z=182 \\ 2x+z=100 \\ y=2x \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x+y+2z=182 \\ 2x+z=100 \\ -2x+y=0 \end{array}\right. \quad A=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 182 \\ 2 & 0 & 1 & 100 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad |M|=\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right|=1$$

  $$x=\left|\begin{array}{rrr} 182 & 1 & 2 \\ 100 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right|=18, \quad y=\left|\begin{array}{rrr} 1 & 182 & 2 \\ 2 & 100 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{array}\right|=36, \quad z=\left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 182 \\ 2 & 1 & 100 \\ -2 & 0 & 0 \end{array}\right|=64$$

- CUESTIÓN B.2:

  a) Estudie la posición relativa de las rectas r y s en función del parámetro a:

  $$r:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=-2-a\lambda \\ z=3+\lambda \end{array}\right. \quad \lambda\in R; \qquad s:\frac{x}{a}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{2}$$

  b) Para el valor del parámetro $a=1$ determine, si es posible, el punto de corte de ambas rectas.

  selcn mayores 2014 Solución:

  a) $r:\left\{\begin{array}{l} R(1,-2,3) \\ \vec{r}=(1,-a,1) \end{array}\right. \quad ; \quad s:\left\{\begin{array}{l} S(0,-1,2) \\ \vec{s}=(a,1,2) \end{array}\right. \qquad \vec{RS}=(-1,1,-1)$

  $$\left|\begin{array}{rrr} 1 & -a & 1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right|=a^2+3a-2=0, a=\left\{\begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array}\right.$$

  Nunca pueden ser paralelas

  Para $a\neq 1,2$ rango$[\vec{r},\vec{s},\vec{RS}]=3$, las rectas se cruzan.

  Para $a=1$, $\left(\begin{array}{r|rr} 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$ se cortan

  Para $a=2$, $\left(\begin{array}{r|rr} 1 & -2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$ se cortan b)$r: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -2-\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases} \quad t \in R; \qquad s: x = y+1 = \dfrac{z-2}{2}$

Como sabemos que se cortan basta sustituir las'paramétricas de r en la primera igualdad de s:

$x = y+1; \quad 1+\lambda = -2-\lambda+1; \quad \lambda = -1; \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$ El punto es $(0, -1, 2)$

- CUESTIÓN B.3:

  a) Demuestre que la distancia del punto $(4, 0)$ a un punto de la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ viene dada por la siguiente expresión: $f(x) = \sqrt{(x-4)^2 + x}$

  b) Determine el punto $P = (x, y)$ de la gráfica anterior que minimiza la distancia al punto $(4, 0)$.

  selcn mayores 2014 Solución:

  a) Sea $Q(4, 0)$ Los puntos $P = (x, y)$ de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ tienen de coordenadas $P(x, \sqrt{x})$

  $d(QP) = |\vec{PQ}| = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{x})^2} = \sqrt{(x-4)^2 + x}$

  b) $d(QP) = f(x) = \sqrt{(x-4)^2 + x} = \sqrt{x^2 - 7x + 16}$

  Anularemos la derivada $f'(x) = \frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+16}}$ el estudio del crecimiento muestra que:

x		7/2	
y'	$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$
		MÍNIMO	

  El punto es $\left(\dfrac{7}{2}, \sqrt{\dfrac{7}{2}}\right)$

- CUESTIÓN B.4:

  a) Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

  b) Aplicando el apartado anterior, calcule la integral definida $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

  selcn mayores 2014 Solución:

  a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2t}dx \\ dx = 2tdt \end{array} \right\} == \int \frac{2t^2}{1+t}dt =$ dividiendo $\displaystyle\int (2t - 2 + \frac{2}{t+1})dt = \frac{2t^2}{2} - 2t +$ $2\ln|t+1| = x - 2\sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x}+1|$

  b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \left[x - 2\sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x}+1|\right]_0^1 = -1 + 2\ln 2$

Selectividad Matemáticas II (Murcia) 8

Año 2013

8.1. Septiembre 2013

- CUESTIÓN A.1:

  Clasifique y resuelva, si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

  $$\left\{\begin{array}{r} 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ 4x + 5y + 2z = 2 \end{array}\right.$$

  selcn Sep 2013 Solución:

  El determinante de la matriz de coeficientes es $|M| = \left|\begin{array}{cc|c} 2 & 3| & 1 \\ 2 & 2| & 1 \\ \cline{1-2} 4 & 5 & 2 \end{array}\right| = 0$

  Por tanto el rango de M es 2

  La matriz ampliada es: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ la última columna es igual a la anterior por tanto:

  rango de $M = 2 =$ rango de $A < 3 =$ número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado con infinitas soluciones dependientes de un parámetro.

  Para resolverlo pasamos por ejemplo la z al segundo miembro como parámetro:

  $$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y = 1 - z \\ 2x + 2y = 1 - z \end{array}\right.$$

  restando queda $y = 0$, y entonces $x = \dfrac{1-z}{2}$

  Solución: $x = \dfrac{1-z}{2}, y = 0, z \in R$

- CUESTIÓN A.2:

  Tres de los cuatro vértices de un tetraedro son los puntos $A = (3, 4, 0)$, $B = (2, 1, 0)$ y $C = (5, 1, 0)$. El cuarto vértice D está en la recta r que pasa por los puntos $(1, 2, 3)$ y $(-1, 4, 5)$.

a) Determine la ecuación de la recta r.

b) Calcule las coordenadas del vértice D para que el volumen del tetraedro sea 6 unidades cúbicas.

Observación: Hay dos soluciones distintas; basta con calcular una de ellas.

selcn Sep 2013 Solución:

a) Recta r: tomamos el primer punto $P(1,2,3)$ y el vector que definen los dos $(-1-1,4-2,5-3)=(-2,2,2)$ como solo interesa la dirección lo dividimos por 2 y queda como vector dirección de r $\vec{v}=(-1,1,1)$. Nos interesa para el siguiente apartado dar la recta en paramétricas:

$$r:\begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \qquad t\in R \\ z=3+t \end{cases}$$

b) El volumen del tetraedro que determinan los vectores $\{\vec{BA},\vec{BC},\vec{BD}\}$ es el producto mixto dividido por seis.

$\{\vec{BA}=(3-2,4-1,0-0)=(1,3,0), \vec{BC}=(3-2,4-1,0-0)=(3,0,0), \vec{BD}=(1-t-2,2+t-1,3+t-0)=(-1-t,1+t,3+t)\}$

hacemos el producto mixto:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1-t & 1+t & 3+t \end{vmatrix}=\frac{-9(t+3)}{6}=\frac{-3(t+3)}{2}$$

Tiene que valer 6, en valor absoluto por tanto:

$\left|\dfrac{-3(t+3)}{2}\right|=6;\quad \dfrac{-3(t+3)}{2}=\pm 6$, que da como soluciones: $t=1$ y $t=-7$

Por lo tanto el cuarto vértice D que está en la recta r puede ser: $D(0,3,4)$ o bien $D'(8,-5,-4)$

- CUESTIÓN A.3:

Calcule los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2+2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x^2}{1-\cos x}$

selcn Sep 2013 Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2+2}=$

$$e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2)\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2)\left(\frac{2}{x^2-1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+4}{x^2-1}\right)}=e^2$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x^2}{1-\cos x}=\frac{0/0}{\text{L'Hôpital}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x^2}{\operatorname{sen} x}=\frac{0/0}{\text{L'Hôpital}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x^2-4x^2\operatorname{sen} x^2}{\cos x}=\frac{2}{1}=2$

- CUESTIÓN A.4:

a) Encuentre una primitiva de la función $f(x)=\dfrac{6}{x^2+2x-8}$

b) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas entre $x=-2$ y $x=0$.

selcn Sep 2013 Solución:

a) Es un integral de una función racional:

primero vamos a ver si se puede descomponer en factores el denominador; raíces del denominador $x=-4, x=2$; reales simples; la descomposición es:

$$\frac{6}{x^2+2x-8}=\frac{6}{(x+4)(x-2)}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x+4)}{(x+4)(x-2)}$$

A y B los obtenemos identificando numeradores $6=A(x-2)+B(x+4)$ que para $x=-4$ da $6=-6A$; $\quad A=-1$ y para $x=2$ da $6=6B$; $\quad B=1$ luego

$$\int\frac{6}{x^2+2x-8}dx=\int\left(\frac{-1}{x+4}+\frac{1}{x-2}\right)dx=-\ln|x+4|+\ln|x-2|+C$$

b) La función tiene signo constante en el intervalo de integración por tanto hacemos la integral definida:

$\displaystyle\int_{-2}^{0}\frac{6}{x^2+2x-8}dx=[-\ln|x+4|+\ln|x-2|]]_{-2}^{0}=-\ln 4+\ln 2-(-\ln 2+\ln 4)=-2\ln 4+2\ln 2=-2\ln 2^2+2\ln 2=-4\ln 2+2\ln 2=-2\ln 2\approx -2\cdot 0'6931=-1'3862$

Por tanto el área del recinto es $S=2\ln 2\approx 1'3862$

- CUESTIÓN B.1:

  Sabiendo que: $\begin{vmatrix} a & b & c\\ 6 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=2$

  calcule, sin desarrollar ni utilizar la regla de Sarrus, los siguientes determinantes, indicando en cada paso qué propiedad de los determinantes se está utilizando.

  a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 3a & 3b & 3c\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c\\ 2a+6 & 2b & 2c+3\\ a+1 & b+1 & c+1\end{vmatrix}$

  selcn Sep 2013 Solución:

  a) Aplicando las propiedades de los determinantes vamos a intentar llegar el determinante inicial:

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 3a & 3b & 3c\end{vmatrix}=$ intercambiamos 1^a y 3^a fila $=-\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=$ sacamos el 3 como factor de la primera fila $=-3\cdot\begin{vmatrix} a & b & c\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=$ ese 3 lo multiplicamos en la segunda fila $=-\begin{vmatrix} a & b & c\\ 6 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-2$

  b) Operamos con combinaciones lineales de las filas que no alteran el determinante $\begin{vmatrix} a & b & c\\ 2a+6 & 2b & 2c+3\\ a+1 & b+1 & c+1\end{vmatrix}=$

  $2^a-1^a\cdot 2$
  3^a-1^a $=\begin{vmatrix} a & b & c\\ 6 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=2$

- CUESTIÓN B.2:

  a) Determine la ecuación de la recta r que pasa por los puntos $A=(2,3,0)$ y $B=(-1,8,1)$.

b) Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es perpendicular a la recta r.

selcn Sep 2013 Solución:

a) Recta r: tomamos el primer punto $A(2, 3, 0)$ y el vector director el que definen los dos $\vec{v} = \vec{AB} = (-1-2, 8-3, 1-0) = (-3, 5, 1)$, la ecuación continua de r es: $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z}{1}$

b) Como el plano es perpendicular a la recta su vector director es vector ortogonal al plano por tanto éste tiene de ecuación general: $-3x+5y+z+D = 0$, hacemos que pase por el punto $(1, 2, 3)$ y queda $-3+10+3+D = 0$

El plano es $-3x + 5y + z - 10 = 0$

- CUESTIÓN B.3:

Descomponga el número 48 como suma de dos números positivos de tal manera que el producto de uno de ellos por el cubo del otro sea el mayor valor posible.

selcn Sep 2013 Solución:

Sean x e y los sumandos: $x + y = 48$

Ha de ser $f = x^3 \cdot y$ máximo; $f(x) = x^3(48 - x) = 48x^3 - x^4$

Anularemos la derivada $f'(x) = 144x^2 - 4x^3 = 4x^2(36 - x)$ el estudio del crecimiento muestra que:

x		36	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$

Los sumandos son 36 y 12

- CUESTIÓN B.4:

a) Encuentre una primitiva de la función $f(x) = x^2\, e^x$

b) Calcule la siguiente integral definida $\displaystyle\int_0^1 x^2\, e^x\, dx$

selcn Sep 2013 Solución:

a) Es integral por partes $\displaystyle\int x^2 e^x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array} \right\} = x^2e^x - \int 2xe^x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = 2x & du = 2dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array} \right\} =$
$\displaystyle x^2e^x - \left[2xe^x - \int 2e^x dx\right] = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

b) $\displaystyle\int_0^1 x^2\, e^x\, dx = \left[x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right]_0^1 = e - 2e + 2e - (2) = e - 2$

8.2. Junio 2013

- CUESTIÓN A.1:

  Discuta, en función del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones:

  $$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ x-ay+z=1 \\ ax+y+z=4 \end{array}\right.$$

  No hay que resolverlo en ningún caso.

  selcn Jun 2013 Solución:

  Hacemos el determinante de la matriz de coeficientes:

  $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 1$ que se anula para: $a=-1, a=1$

  - Para $a \neq -1$ y $a \neq 1$ $rango(M) = 3 = rango(A) =$ número de incógnitas, sistema compatible determinado.
  - Para $a=-1$ la matriz ampliada es

    $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, es evidente que el rango de M y de A es 2 por tanto

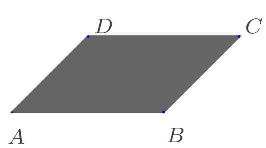
    Para $a=-1$, $rango(M) = 2 = rango(A) < 3 =$ número de incógnitas, sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones dependientes de un parámetro.
  - Para $a=1$ la matriz ampliada es

    $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, el menor: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

    por tanto el rango de M es 2 y el de A es 3 luego:

    Para $a=1$, $rango(M) = 2 < 3 = rango(A)$, sistema incompatible.

- CUESTIÓN A.2: Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A=(1,3,-4), B=(2,6,7)$ y $C=(5,-1,2)$.

  a) Calcule el área del paralelogramo.

  b) Determine el cuarto vértice, D.

  selcn Jun 2013 Solución:

  Empezamos por el apartado b)

Los vectores $\vec{AB} = (2-1, 6-3, 7+4) = (1,3,11)$ y $\vec{DC} = (5-x, -1-y, 2-z)$ son iguales, por tanto, igualando coordenadas: $1 = 5-x; 3 = -1-y; 11 = 2-z$ resulta: $x = 4, y = -4, z = -9$ el punto es $D(4,-4,-9)$

a) El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los vectores $\vec{AB} = (1,3,11)$, $\vec{AD} = (4-1, -4-3, -9+4) = (3,-7,-5)$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 11 \\ 3 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 62\vec{i} + 38\vec{j} - 16\vec{k}$$

El módulo es $\sqrt{62^2+38^2+16^2} = \sqrt{5544}$

- CUESTIÓN A.3: Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$, se pide:

a) Dominio de definición y puntos de corte con los ejes.

b) Estudio de las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos (máximos y mínimos).

d) Representación gráfica aproximada.

selcn Jun 2013 Solución:

1) Dominio y regionamiento Estudiamos el signo de la función.

Hallando las raíces de numerador y denominador resulta que delimita región de cambio de signo de $y: \quad x = 1$

x		1	
y	$-$		$+$

El dominio es $R - \{1\}$

2) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY: x = 0$, resulta $y = 0$ El origen es el único punto de corte

3) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales $x = 1$

horizontales: no hay

Asíntota oblicua $y = mx + n$

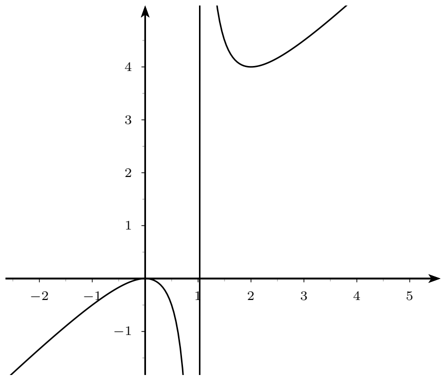
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{fx)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} - x = \frac{x}{x-1} = 1$$ Asintota oblicua:; $y = x+1$

4) Extremos y crecimiento Estudiamos el signo de la derivada

$$f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

x		0		2	
y'	$+$		-		$+$
y	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$	MÍNIMO	$\nearrow$



- CUESTIÓN A.4: Calcule la siguiente integral indefinida $\displaystyle\int \frac{10}{x^2-x-6}dx$

  selcn Jun 2013 Solución:

  $\displaystyle\int \frac{10}{x^2-x-6}dx$, a partir de las raíces del denominador planteamos la descomposición en fracciones simples

  $$\frac{10}{x^2-x-6} = \frac{x}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

  Identificando numeradores: $10 = A(x-3)+B(x+2)$, para $x=3$ resulta $10=5B$, $\quad B=2$, para $x=-2$ queda $10=-5A$ luego $A=-2$, sustituyendo:

  $$\int \frac{10}{x^2-x-6}dx = \int \left(\frac{-2}{x+2} + \frac{2}{x-3}\right) dx = -2\ln|x+2| + 2\ln|x-3| + C$$

- CUESTIÓN B.1: a) Compruebe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, es regular (o inversible) y calcule su matriz inversa.

  b) Resuelva la ecuación matricial $AX + A^2 = B$, siendo A la matriz anterior y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

  ¡OJO!: El producto de matrices NO es conmutativo.

  selcn Jun 2013 Solución:

  a) Una matriz es invertible si su determinante no es cero, en nuestro caso: $|A| = -4+3 = -1 \neq 0$

  La matriz inversa es la adjunta de la traspuesta dividida por el determinante de la matriz: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}[adj(A^t)]$

  $$A^t = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad adj(A^t)\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

  Primero despejamos X: $AX + A^2 = B; \quad AX = B - A^2; \quad X = A^{-1}(B-A^2)$

  $$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}$$

  $$B - A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ -9 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -1 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

  $$X = A^{-1}(B-A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 & -1 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -12 & -21 \end{pmatrix}$$

- CUESTIÓN B.2:

  a) Determine la ecuación del plano π que contiene a los puntos $A = (3, 2, 0)$, $B = (5, 1, 1)$ y $C = (2, 0, -1)$.

  b) Determine la ecuación de la recta r que pasa por los puntos $D = (1, 2, 1)$ y $E = (2, -6, 0)$.

  c) Estudie la posición relativa de r y π.

  selcn Jun 2013 Solución:

  a) Considerando los vectores $\vec{AB} = (5-3, 1-2, 1-0) = (2, -1, 1)$, $\vec{AC} = (2-3, 0-2, -1-0) = (-1, -2, -1)$ como solo interesa la dirección cambiamos el signo al último.

  $$\pi : \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad 3x + y - 5z - 11 = 0$$

  b) Considerando el vector $\vec{DE} = (2-1, -6-2, 0-1) = (1, -8, -1)$ como solo interesa la dirección cambiamos el signo $(-1, 8, 1)$

  $$r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{8} = z - 1$$

  c) Veamos si el vector ortogonal de π es perpendicular al dirección de r: $(3, 1, -5) \cdot (-1, 8, 1) = -3 + 8 - 5 = 0$, por tanto la recta es paralela o está contenida en el plano, comprobemos si un punto de r por ejemplo el $D(1, 2, 1)$ está en π : $\quad 3 \cdot 1 + 2 - 5 \cdot 1 - 11 = -11 \neq 0$, por tanto la recta no está contenida en el plano.

  La recta y el plano son paralelos.

- CUESTIÓN B.3: Considere la función dada por

  $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 - e^x} & si \quad x \neq 0 \\ -1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

  a) Demuestre que la función es continua en todo R.

  b) Determine si la función es derivable en $x = 0$ y, en caso afirmativo, calcule $f'(0)$.

  selcn Jun 2013 Solución:

  a) Es continua siempre por ser resultado de operaciones entre funciones continuas salvo quizá donde se parte el dominio o se anula el denominador que es en $x = 0$ donde vamos a estudiarla:

  $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{1 - e^x} = \left\{ \begin{matrix} \frac{0}{0} \\ \text{L'Hôpital} \end{matrix} \right\} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{-e^x} = -1$$

  El límite es exactamente igual por la derecha, además $f(0) = -1$, luego sí es continua en $x = 0$

  b) Como la función es continua es suficiente comprobar que los límites laterales en $x = 0$ de la función derivada coinciden

  $$f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{(1 - e^x)^2} \text{ si } x \neq 0$$

  $$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{xe^x - e^x + 1}{(1 - e^x)^2} = \left\{ \begin{matrix} \frac{0}{0} \\ \text{L'Hôpital} \end{matrix} \right\} =$$

  $$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x + xe^x - e^x}{-2(1 - e^x)e^x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{xe^x}{-2(e^x - e^{2x})} = \left\{ \begin{matrix} \frac{0}{0} \\ \text{L'Hôpital} \end{matrix} \right\} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x + xe^x}{-2(e^x - 2e^{2x})} = \frac{1}{2}$$

  El límite es exactamente igual por la derecha

Por tanto la función es derivable en $x=0$ y $f'(x)=\dfrac{1}{2}$

En este caso quizá sea más simple aplicar la definición de derivada:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{1-e^h}+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h+1-e^h}{1-e^h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+1-e^h}{h(1-e^h)}=\lim_{h\to 0}\frac{h+1-e^h}{h-he^h}=\left\{\begin{array}{l}\frac{0}{0}\\ \text{L'Hôpital}\end{array}\right\}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{1-e^h}{1-e^h-he^h}=\left\{\begin{array}{l}\frac{0}{0}\\ \text{L'Hôpital}\end{array}\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{-e^h}{-e^h-e^h-he^h}=\frac{1}{2}$$

- CUESTIÓN B.4:

  a) Encuentre una primitiva de la función $f(x)=ar\,\mathrm{tg}\,x$.

  b) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica

  de la función $f(x)$ y el eje de abscisas entre $x=0$ y $x=1$.

  selcn Jun 2013 Solución:

  a) $$\int ar\tan x\,dx=\left\{\begin{array}{ll}u=ar\tan x; & du=\dfrac{1}{1+x^2}\,dx\\ dv=dx; & v=x\end{array}\right\}=x\,ar\tan x-\int\frac{x}{1+x^2}\,dx=x\,ar\tan x-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx=$$
  $$x\,ar\tan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

  b) La función es positiva en el recinto de integración

  $$S=\int_0^1 ar\tan x\,dx=\left[x\,ar\tan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1=ar\tan 1-\frac{1}{2}\ln(2)-(ar\tan 0-\frac{1}{2}\ln(1))=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\ \mathrm{u}^2$$

Selectividad Matemáticas II (Murcia) 9

Año 2012

9.1. Septiembre 2012

- CUESTIÓN A.1:

  a) Determine para qué valores del parámetro a el conjunto de vectores $S = \{(1,a,1),(1-a,a-1,0),(1,1,a)\}$ forma una base de R^3.

  b) Estudie el rango del conjunto de vectores S en los casos en que no forme una base de R^3.

  selcn Sep 2012 Solución:

  Anulamos el determinante para estudiar el rango del conjunto de vectores:

  $$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3\,a + 2 = 0$$ que tiene de soluciones: $a = -2, a = 1$

  a) Por tanto los vectores son linealmente independientes y por ser tres forman base siempre que $a \neq -2, 1$

  b) Para $a = -2$ la matriz formada por sus coordenadas es: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ que contiene un menor de orden 2 no nulo, el rango por tanto es 2.

  Para $a = 1$ la matriz formada por sus coordenadas es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 1.

- CUESTIÓN A.2:

  Determine la ecuación implícita (o general) del plano que contiene al punto $A = (0,1,2)$ y es perpendicular a la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z = -1 \\ x - y + z = 3 \end{array} \right.$

  selcn Sep 2012 Solución:

  El vector director de la recta nos sirve como vector ortogonal del plano buscado. Lo obtenemos del producto vectorial de los dos vectores ortogonales de los planos que definen la recta:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} == -3\vec{j} - 3\vec{k}$$, como interesa solo la dirección tomamos el vector $(0,1,1)$

El plano perpendicular a la recta es por tanto: $y + z + D = 0$, haciendo que pase por el punto $A = (0,1,2)$: $1 + 2 + D = 0$ queda el plano $y + z - 3 = 0$

- CUESTIÓN A.3:

  Dada la función $f(x) = x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - 1\right)$, se pide:

  a) Dominio de definición.

  b) Calcule $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$. ¿Es posible calcular también $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$? Justifique la respuesta.

  c) Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

  selcn Sep 2012 Solución:

  a) Estudiamos el signo de lo que hay dentro de la raíz:

     Hallando las raíces de numerador y denominador resulta que delimitan región de cambio de signo de $x = \pm 1$

x		-1	1	
$\dfrac{x+1}{x-1}$	$+$		$-$	$+$

     Por tanto el dominio es $Dom(f) = (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$

  b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \left\{ 1 \cdot \left(\sqrt{\dfrac{2}{0^+}} - 1\right)\right\} = \infty$

     No es posible hallar $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ porque a la izquierda de 1 no existe función.

  c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - 1\right) = \{\infty \cdot (1-1) = \infty \cdot 0\}$

     Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

     $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - 1\right)\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} + 1\right)}{\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} + 1\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\left(\dfrac{x+1}{x-1} - 1\right)}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} + 1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x \cdot \dfrac{2}{x-1}}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} + 1} =$$

     $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\dfrac{2x}{x-1}}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} + 1} =$ Donde el numerador y el denominador de la fracción principal tienen límite:

     $= \dfrac{2}{\sqrt{1} + 1} = 1$

- CUESTIÓN A.4:

  De todas las primitivas de la función $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1 + e^x}$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas $(0,1)$.

  selcn Sep 2012 Solución:

Hacemos el cambio $e^x = t$ diferenciando $e^x dx = dt$

$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = \int \frac{e^x \cdot e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{t}{1+t}dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = t - \ln(1+t) =$ deshaciendo el cambio $= e^x - \ln(1+e^x) + C$

La que pasa por $(0,1)$ es $1 = e^0 - \ln(1+e^0) + C; 1 = 1 - \ln 2 + C$. Resulta $C = \ln 2$

La primitiva buscada es $F(x) = e^x - \ln(1+e^x) + \ln 2$

- CUESTIÓN B.1:

a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcule las potencias A^2, A^3 y A^4.

b) Calcule A^{2012}.

selcn Sep 2012 Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$

Siendo I la matriz unidad de orden 3

Visto lo cual:

$A^4 = -I. \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $A^{2012} = A^{670 \cdot 3 + 2} = \left(A^3\right)^{670} \cdot A^2 = (-I)^{670} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

- CUESTIÓN B.2:

Considere las rectas r y s dadas por las ecuaciones

$r: \frac{x}{7} = \frac{y}{a-4} = \frac{z+6}{5a-6} \qquad s: \frac{x-5}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-6}{4}$

a) Estudie la posición relativa de r y s en función del parámetro a.

b) Calcule el punto de corte de r y s en los casos en que se corten.

selcn Sep 2012 Solución:

a)

Consideremos punto y vector dirección de cada recta: $r: \begin{cases} P(0,0,-6) \\ \vec{v} = (7, a-4, 5a-6) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(5,1,6) \\ \vec{w} = (3,-1,4) \end{cases}$

Estudiamos el rango de la matriz formada por los dos vectores:

$\begin{pmatrix} 7 & a-4 & 5a-6 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ Anulamos los dos menores: $\begin{vmatrix} 7 & a-4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7-3a+12 = 0; a = \dfrac{5}{3};$ $\begin{vmatrix} 7 & 5a-6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$ $28 - 15a + 18 = 0; a = \dfrac{46}{15}$

Por tanto $\forall a \in R$ el rango es dos, nunca son paralelos, por tanto las rectas se cruzan o se cortan.

(También se podría haber visto que la proporcionalidad de los vectores: $\dfrac{3}{7} = \dfrac{-1}{a-4} = \dfrac{4}{5a-6}$ es imposible para cualquier valor de a)

Para que se corten ha de ser $ran(\vec{PQ}, \vec{v}, \vec{w}) = 2$. Basta anular el determinante de la matriz que forman: $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 12 \\ 7 & a-4 & 5a-6 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 24a - 96 = 0; a = 4$

Resumiendo: Para $a = 4$, las rectas se cortan; para $a \neq 4$ las rectas se cruzan.

b) Para $a = 4$, la recta r queda: $r : \begin{cases} x = 7t \\ y = 0 \\ z = -6 + 14t \end{cases}$

Que sustituyendo en la primera igualdad de s resulta: $\dfrac{7t-5}{3} = \dfrac{-1}{-1}; 7t - 5 = 3; t = \dfrac{8}{7}$, sustituyendo este valor en r obtenemos: $r : \begin{cases} x = 8 \\ y = 0 \\ z = -6 + 16 \end{cases}$.

El punto de corte de las dos rectas es $(8, 0, 10)$

- CUESTIÓN B.3:

  Considere la función dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + a & si \quad x \leq 0 \\ -x^2 + bx + b + 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$.

  Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales $f(x)$ es continua y derivable en todo R.

  selcn Sep 2012 Solución:

  La función es continua y derivable en todo R por tener expresión polinómica, salvo en $x = 0$ en que se parte el dominio, vamos a estudiarla:

  Estudiamos los límites laterales en $x = 0$:

  $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 - 3x + a) = a$

  $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x^2 + bx + b + 1) = b + 1$

  Para que sea continua han de coincidir: $a = b + 1$

  Ahora hacemos la función derivada: $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & si \quad x < 0 \\ -2x + b & si \quad x > 0 \end{cases}$

  Para que sea derivable, partiendo de que $f(x)$ es continua, han de coincidir los límites de la función derivada en $x = 0$:

  $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x - 3) = -3$

  $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-2x + b) = b$

Para que sea derivable han de coincidir: $-3 = b$

Por tanto la función f es continua y derivable siempre para $a = -2, b = -3$

- CUESTIÓN B.4:

  Calcule el área comprendida entre la curva $y = \dfrac{3}{6+2x^2}$, el eje de abscisas y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.

  selcn Sep 2012 Solución:

  La función es siempre positiva por tanto la integral dará directamente el área.

  Para obtener los puntos de inflexión anulamos la segunda derivada:

  $y' = -\dfrac{12\,x}{(6+2\,x^2)^2}$

  $y'' = \dfrac{72(x^2-1)}{(6+2\,x^2)^3}$

  Los puntos de inflexión corresponde a $x = \pm 1$, como la función es simétrica respecto a OY el área vendrá dada por: $S = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{6+2x^2}dx$

  Calculamos la primitiva, que por no tener raíces en el denominador es tipo $ar\tan$:

  $$\int \frac{3}{6+2x^2}dx = \int \frac{3/6}{1+\frac{x^2}{3}}dx = \int \frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}dx = \frac{\sqrt{3}}{2}ar\tan\frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

  $$\int_0^1 \frac{3}{6+2x^2}dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[ar\tan\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(ar\tan\frac{1}{\sqrt{3}} - ar\tan 0\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{6}$$

  El área es por tanto $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$ u^2

9.2. Junio 2012

- CUESTIÓN A.1:

  a) Discuta el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

  $$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+ay+a^2z=-1 \\ ax+a^2y+a^3z=2 \end{cases}$$

  b) Resuelva el sistema cuando sea compatible

  selcn Jun 2012 Solución: En la matriz de coeficientes $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & a^3 \end{pmatrix}$ es fácil ver que el determinante es cero pues la última fila es la anterior multiplicada por a, luego el rango de M es como máximo 2.

  Por tanto para tener un menor de orden máximo recurrimos a la ampliada:

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ a & a^2 & 2 \end{vmatrix} = a^2+a-2$ que se anula para $a=1, a=-2$

  En consecuencia: para $a\neq 1, a\neq -2$ $rango$(M) <3 = rango(A) SISTEMA INCOMPATIBLE

  Para $a=1$ la matriz ampliada del sistema es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

  En la que es inmediato ver que $rango$(M) =1 <2 = rango(A) SISTEMA INCOMPATIBLE

  Para $a=-2$ la matriz ampliada del sistema es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$, podemos eliminar la última fila y queda $rango$(M) = 2 = rango(A) SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO con soluciones dependientes de un parámetro.

  b) Se trata de resolver el sistema para $a=-2$ que es compatible indeterminado: $r:\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-2y+z=-1 \end{cases}$

  Pasamos z al segundo miembro: $r:\begin{cases} x+y=2-z \\ x-2y=-1-4z \end{cases}$ que por Cramer da de soluciones:

  Determinante de la matriz de coeficientes: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$

  $$x=\frac{\begin{vmatrix} 2-z & 1 \\ -1-4z & -1 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{6z-3}{-3}=1-2z; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-z \\ 1 & -1-4z \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-3z-3}{-3}=1+z$$

- CUESTIÓN A.2: Considere la recta r y el plano π dados por las ecuaciones

  $$r:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1} \qquad \pi: x-2y-z=4$$

  a) Calcule el ángulo que forman la recta r y el plano π.

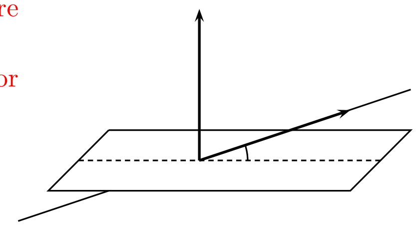
  b) Determine el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

  selcn Jun 2012 Solución:

Consideremos punto y vector dirección de la recta: $r: \left\{ \begin{array}{l} P(-1,1,2) \\ \vec{v} = (2,-1,1) \end{array} \right.$

El vector ortogonal al plano π es $\vec{w} = (1,-2,-1)$

a) Es el menor ángulo que forma la recta r con su proyección ortogonal sobre el plano.
Se halla a partir del ángulo que forman el vector dirección de la recta y el vector ortogonal del plano, el ángulo buscado es el complementario.



$\cos\alpha = \left| \dfrac{\vec{v}.\vec{w}}{|\vec{v}|.|\vec{w}|} \right| = \left| \dfrac{2+2-1}{\sqrt{4+1+1}.\sqrt{1+4+1}} \right| = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$ar\cos\dfrac{1}{2} = 60^0$

Por tanto el ángulo de r y π es 30^0

b) El plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π contiene al punto y al vector de la recta y al vector ortogonal del plano:

$$\left| \begin{array}{ccc} x+1 & y-1 & z-2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{array} \right| = 0; \quad x+y-z+2=0$$

- CUESTIÓN A.3:

Considere la función dada por $f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2x^2+ax+b & \text{si} & x \leq 1 \\ \ln x - 1 & \text{si} & x > 1 \end{array} \right.$

Determine los valores de los parámetros a y b sabiendo que $f(x)$ cumple las siguientes propiedades

a) $f(x)$ es continua en todo R;

b) $f(x)$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 0$.

selcn Jun 2012 Solución:

Estudiamos los límites laterales en $x = 1$:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x^2+ax+b) = 2+a+b$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (\ln x - 1) = -1$

Para que sea continua han de coincidir: $2+a+b=-1$

Además si tiene un extremo relativo en $x = 0$ la derivada ha de anularse en $x = 0$ por tanto como su expresión en ese punto es $f'(x) = 4x+a$; luego $f'(0) = 0$ resulta $\boxed{a = 0}$

Sustituyendo en la ecuación $2+a+b=-1$ queda $2+b=-1$, $\boxed{b=-3}$

- CUESTIÓN A.4:

a) Encuentre una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$

b) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = 9$.

selcn Jun 2012 Solución:

a) Cambio de variable:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right\} = \int \left(\frac{1}{1+t}\right) 2t\,dt = \int \left(2 + \frac{-2}{1+t}\right) dt = 2t - 2\ln(1+t) =$$

$= 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$

b) Como la función es siempre positiva el área viene dada directamente por la integral:

$$S = \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x})\right]_0^9 = 2\sqrt{9} - 2\ln(1+\sqrt{9} = 6 - 2\ln 4 = 3{,}227 \text{ u}^2$$

- CUESTIÓN B.1:

  Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal si cumple que $A^t \cdot A = I$, donde I denota la matriz identidad y A^t es la traspuesta de A.

  Determine para qué valores de los parámetros a y b la siguiente matriz es ortogonal

  $$A = \begin{pmatrix} a & -a & b \\ a & a & 0 \\ 0 & b & -1 \end{pmatrix}$$

  selcn Jun 2012 Solución:

  $$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & -a & b \\ a & a & 0 \\ 0 & b & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ -a & a & b \\ b & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2+2a^2 & 0 & -ab-b \\ 0 & 2a^2 & ab \\ -ab-b & ab & b^2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

  Identificando elementos:

  tercera fila tercera columna: $b^2 + 1 = 1$ resulta $\boxed{b = 0}$

  segunda fila segunda columna: $2a^2 = 1$ resulta $\boxed{a = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

- CUESTIÓN B.2:

  a) Halle la ecuación implícita (o general) del siguiente plano $\pi : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda - \mu \\ y = -3 + \lambda \\ z = 2 + 3\mu \end{array} \right.$

  b) Determine la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto $(-1, 2, 3)$.

  selcn Jun 2012 Solución:

  a) Nos dan las ecuaciones paramétricas del plano, en ellas figuran un punto y dos vectores dirección: punto: $(1, -3, 2)$, vectores dirección: $(2, 1, 0), (-1, 0, 3)$

  Planteamos la ecuación matricial y efectuamos el determinante:

  $$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad 3x - 6y + z - 23 = 0$$

  b) En la ecuación general del plano aparece un vector ortogonal al mismo $(3, -6, 1)$ que nos servirá de vector dirección de la recta perpendicular: $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{x-2}{-6} = \dfrac{x-3}{1}$

- CUESTIÓN B.3:

  Dada la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-1}$, se pide:

  a) Dominio de definición y cortes con los ejes.

  b) Estudio de las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).

  c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos (máximos y mínimos).

  d) Representación gráfica aproximada.

  selcn Jun 2012 Solución:

  a) El radicando ha de ser mayor o igual que 0 y el denominador no puede ser cero, por tanto:
     Dominio $R - (-3, 3)$
     Corte con OX se hace $y = 0$ resulta $x = \pm 3$
     Corte con OY se hace $x = 0$ no hay.

  b) Asíntotas:
     Verticales sería en $x = 1$ pero no existe la función alrededor.
     Horizontales: $y = n$
     Al no ser racional hay que estudiarla por lo dos lados:

     $$n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}} = 1$$

     $$n = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-1} = \left\{\begin{matrix}\text{dividimos numerador} \\ \text{y denominador por |x|}\end{matrix}\right\} \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}{\frac{x}{|x|}-\frac{1}{|x|}} = -1$$

     Asíntota horizontal $y = 1$ por la derecha, $y = -1$ por la izquierda.
     Como hay asíntotas horizontales no puede haber oblicua.

  c) Estudiamos el signo de la derivada:

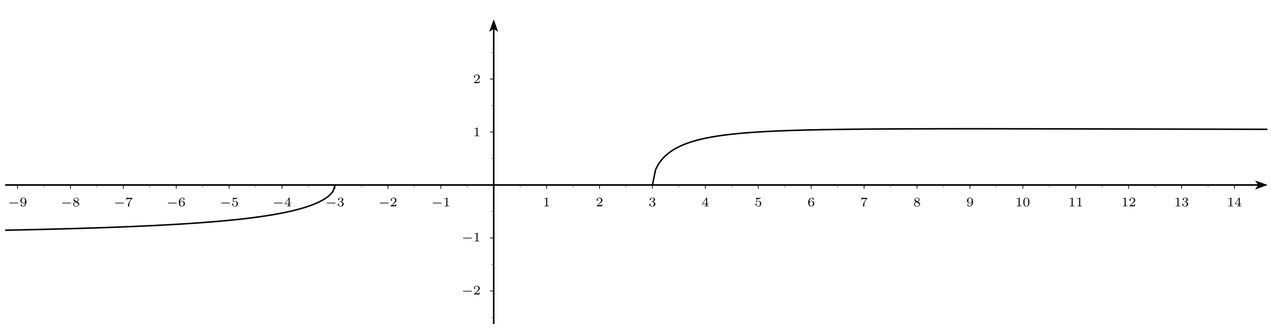
     $$f'(x) = \frac{9-x}{(x-1)^2\sqrt{x^2-9}}$$

x		9	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$

     Hay un máximo en $x = 9$.

     Es interesante estudiar punto de corte con la asíntota: $\left\{\begin{matrix} y = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-1} \\ y = 1 \end{matrix}\right.$

     $$\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-1} = 1; \sqrt{x^2-9} = x-1; x^2-9 = (x-1)^2; x^2-9 = x^2-2x+1; 2x = 10; \quad x = 5$$



- CUESTIÓN B.4:

a) Encuentre una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$

b) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = 1$.

selcn Jun 2012 Solución:

a) Por partes:

$$\int \frac{x^2}{e^x}\,dx = \int x^2 e^{-x}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^x \end{array} \right\} = -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = 2x & du = 2dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^x \end{array} \right\} =$$
$$-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + \int 2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} = \frac{-x^2 - 2x - 2}{e^x} + C$$

b) Como la función es siempre positiva el área viene dada directamente por la integral:

$$S = \int_0^1 \frac{x^2}{e^x}\,dx = \left[\frac{-x^2 - 2x - 2}{e^x}\right]_0^1 = \frac{-5}{e} + 2 = 0'16 \text{ u}^2.$$

9.3. Muestra cn2 diciembre 2011

- CUESTIÓN A.1: a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} =$, demuestre que $A^2 = -I$, donde I denota la matriz identidad 2×2.

  b) Utilice la propiedad del apartado a) para calcular A^{100}.

  muestra dic 2011 Solución:

  a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-5 & 10-10 \\ -2+2 & -5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

  b) $A^{100} = \left(A^2\right)^{50} = (-I)^{50} = I$

- CUESTIÓN A.2: Considere las rectas r y s dadas por las ecuaciones

  $r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \qquad s : \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3+a}{a}$

  a) Demuestre que, independientemente del valor del parámetro a, las rectas r y s se cortan.

  b) Determine el valor del parámetro a para que r y s sean perpendiculares

  muestra dic 2011 Solución:

  a)

  Hallemos un punto y un vector dirección de la recta r(es fácil resolver el sistema sumando las ecuaciones)

  $r : \begin{cases} \text{punto } P(1,0,0) \\ \text{vector } \vec{v} = (0,1,1) \end{cases}$ para la otra recta $s : \begin{cases} \text{punto } Q(-2,1,3-a) \\ \text{vector } \vec{w} = (3,2,a) \end{cases}$, además consideramos el vector $\vec{PQ} = (-3,1,3-a)$

  Es inmediato ver que $\vec{v} = (0,1,1)$ y $\vec{w} = (3,2,a)$ no son proporcionales $\forall a$ por tanto las rectas se cortan o se cruzan: hacemos el determinante

  $[\vec{PQ}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 3-a \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix} = 0$, por tanto las rectas sin ser paralelas están en un plano, concluimos que para cualquier valor de a las rectas se cortan

  b) Las rectas serán perpendiculares cuando el producto escalar de sus vectores dirección sea nulo:

  $\vec{v} \cdot \vec{w} = (0,1,1) \cdot (3,2,a) = 2 + a = 0$ Por tanto r y s son perpendiculares cuando $a = -2$

- CUESTIÓN A.3: Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, determine los valores de los parámetros a, b y c sabiendo que $f(x)$ cumple las siguientes propiedades:

  a) $f(x)$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -1$;

  b) $f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$;

  c) $f(x)$ corta al eje OX en el punto de abscisa $x = -2$.

  muestra dic 2011 Solución:

Hallamos las derivadas: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$; $\quad f''(x) = 6x + 2a$ y aplicamos las condiciones:

$f(x)$ tiene extremo relativo en $x = -1$, por tanto $f'(-1) = 0$, $\quad 3 - 2a + b = 0$

$f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = 0$, por tanto $f''(0) = 0$, $\quad 2a = 0$

$f(x)$ pasa por el punto $(-2, 0)$ por tanto $f(-2) = 0$, $\quad -8 + 4a - 2b + c = 0$

queda por tanto el sistema: $\left\{ \begin{array}{c} 3 - 2a + b = 0 \\ 2a = 0 \\ -8 + 4a - 2b + c = 0 \end{array} \right.$ de solución $a = 0, b = -3, c = 2$. La función es $f(x) = x^3 - 3x + 2$

- CUESTIÓN A.4: a) Encuentre una primitiva de la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x)$.

  b) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = \pi$.

  muestra dic 2011 Solución:

  a) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \operatorname{sen} x dx & v = -\cos x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = 2x & du = 2dx \\ dv = \cos x dx & v = \operatorname{sen} x \end{array} \right\} =$
  $\displaystyle -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x - \int 2 \operatorname{sen} x dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C$

  b) $f(x)$ es siempre positiva en $[0, \pi]$ luego la integral da el área directamente:

  $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \operatorname{sen} x dx = \left[-x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x\right]_0^\pi = -\pi^2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) - (2) = \pi^2 - 4$

- CUESTIÓN B.1: a) Discuta, en función de los parámetros a y b, el siguiente sistema de ecuaciones:

  $$r : \left\{ \begin{array}{c} x + 3y - 2z = 2 \\ 3x - y = b \\ ax + y - z = 3 \end{array} \right.$$

  b) Si es posible, resuélvalo para $a = 2$ y $b = 4$.

  muestra dic 2011 Solución:

  El determinante de la matriz de coeficientes es $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 2a$

  Por tanto si $a \neq 2$ y para cualquier b $ran(M) = 3 = ran(A) = n^0$ de incógnitas, el sistema es compatible determinado.

  Para $a = 2$ queda la matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & b \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

  Es inmediato ver que $ran(M) = 2$. Tomamos el menor $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & b \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = b - 4$

Para $b \neq 4$, $ran(M) = 2 < 3 = ran(A)$ el sistema es incompatible.

Para $b \neq 4$ queda la matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ podemos eliminar la última fila,

$ran(M) = 2 = ran(A) < 3 = n^0$ de incógnitas, resulta el sistema compatible indeterminado

b) Corresponde con el último caso, dejamos las dos primeras ecuaciones:

$r : \begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$

Resulta poniendo las soluciones en función de x que $y = 3x - 4, z = 5x - 7, x \in R$

- CUESTIÓN B.2: Considere las rectas r y s dadas por las ecuaciones

  $r : \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-5}{4} \qquad s : \begin{cases} 2x - z = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

  a) Determine la ecuación de la recta que es perpendicular común a r y s.

  b) Calcule la distancia entre r y s.

  muestra dic 2011 Solución:

  Hallemos un punto y un vector dirección de la recta

  $r : \begin{cases} \text{punto } P(4,3,5) \\ \text{vector } \vec{v} = (3,-1,4) \end{cases}$

  Para la otra recta, reordenamos es sistema para que quede la recta en paramétricas: $s : \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = -2 + 2t \end{cases}$

  Obtenemos así punto y vector dirección de s : $\begin{cases} \text{punto } Q(0,-1,-2) \\ \text{vector } \vec{w} = (1,0,2) \end{cases}$

  a) Es inmediato ver que $\vec{v} = (3,-1,4)$ y $\vec{w} = (1,0,2)$ no son proporcionales por tanto las rectas se cortan o se cruzan:

  La perpendicular común tiene como vector dirección el vector perpendicular a los vectores dirección de las rectas dadas:

  $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ tomamos como vector: $\vec{a} = (-2,-2,1)$

  Ahora hallamos el plano que contiene a una de ellas y contiene a este vector:

  Por ejemplo el plano que contiene a r

  $\begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z-5 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 7x - 11y - 8z + 45 = 0$

  Ahora hallamos el punto de intersección de este plano con la recta $s : \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = -2 + 2t \end{cases}$

  $7t - 11(-1) - 8(-2 + 2t) + 45 = 0; \quad t = 8$ sustituyendo obtenemos el punto de corte: $(8,-1,14)$

La perpendicular común es: $\dfrac{x-8}{-2}=\dfrac{y+1}{-2}=z-14$

b) Se halla el plano que contiene a r y es paralelo a s, y luego hallar la distancia de un punto cualquiera P de s al plano:

Plano π que contiene a r y es paralelo a s: tiene como vector ortogonal el ya hallado: $\vec{a}=(-2,-2,1)$, suecuación general es pues $-2x-2y+z+D=0$ sustituyendo el punto $P(4,3,5):\quad -2\cdot 4-2\cdot 3+5+D=0,\quad D=9$, el plano es $\pi: -2x-2y+z+9=0$

Entonces: $d(s,r)=d(Q,\pi)=\left|\dfrac{-2\cdot 0-2\cdot(-1)-2+9}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}\right|=\dfrac{9}{\sqrt{9}}=\dfrac{9}{3}=3$

- CUESTIÓN B.3: Considere la función dada por $f(x)=\begin{cases} 3x^2+ax+2 & si \quad x<0 \\ -x^2+5x+2 & si \quad x\geq 0\end{cases}$

  a) Demuestre que, independientemente del valor del parámetro a, $f(x)$ es continua en todo R.

  b) Determine el valor del parámetro a para que $f(x)$ sea derivable en todo R.

  muestra dic 2011 Solución:

  a) Recordemos que una función $f(x)$ es continua en un punto x_0 cuando los límites laterales son iguales a $f(x_0)$

  La función viene dada por expresiones polinómicas, luego es continua siempre salvo quizá donde se parte el dominio: en $x=0$

  $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3x^2+ax+2)=2$

  $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x^2+5x+2)=2$

  $f(0)=2$, luego sí es continua en $x=0$

  b) Por la misma razón la función es derivable en todo R salvo quizá donde se parte el dominio: en $x=0$

  La función derivada viene dada por $f'(x)=\begin{cases} 6x+a & si \quad x<0 \\ -2x+5 & si \quad x>0\end{cases}$

  Para que la función sea derivable en $x=0$ hacemos que coincidan los límites de la derivada por los dos lados:

  $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(6x+a)=a$

  $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-2x+5)=5$

  Por tanto para que la función sea derivable en todo R tiene que ser $a=5$ y sería: $f'(x)=\begin{cases} 6x+5 & si \quad x<0 \\ -2x+5 & si \quad x\geq 0\end{cases}$

- CUESTIÓN B.4: Calcule el área comprendida entre la curva $y=\dfrac{4}{9+3x^2}$, el eje de abscisas y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.

  muestra dic 2011 Solución:

  Las inflexiones serán puntos donde se anule la derivada segunda:

$f'(x) = \dfrac{-24x}{(9+3x^2)^2} = 24\dfrac{-x}{(9+3x^2)^2}$

$f''(x) = 24\dfrac{-9+9x^2}{(9+3x^2)^3}$ que se anula para $x=-1, \quad x=1$

Como la función es par la gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas y el área será el doble del área limitada entre $x=0$ $x=1$ que por ser positiva la función es directamente la integral: $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{9+3x^2}dx$

Calculemos primero la primitiva que es de tipo arcotangente:

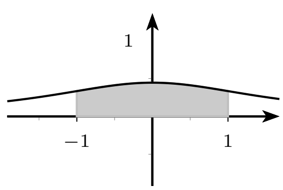
$$\int \frac{4}{9+3x^2}dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{3+x^2}dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{3\left(1+\frac{x^2}{3}\right)}dx = \frac{4}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}dx = \frac{4\sqrt{3}}{9}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}dx = \frac{4\sqrt{3}}{9} ar\tan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$$

Entonces:

$$\int_0^1 \frac{4}{9+3x^2}dx = \frac{4\sqrt{3}}{9}\left[ar\tan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{9}\left[ar\tan\frac{1}{\sqrt{3}} - ar\tan 0\right] =$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{9}\left(\frac{\pi}{6}-0\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$$

El área pedida es por tanto: $S = \dfrac{4\sqrt{3}}{27}\pi \text{ u}^2 = 0'8061 \text{ u}^2$



Selectividad Matemáticas II (Murcia) 10

Año 2011

10.1. Septiembre 2011

- CUESTIÓN A.1: Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$, calcule, sin utilizar la regla de Sarrus, el valor del siguiente determinante, indicando en cada paso qué propiedad (o propiedades) de los determinantes se está utilizando.

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ \frac{x}{2}+3a & \frac{y}{2}+3b & \frac{z}{2}+3c \end{vmatrix}$$

selcn Sep 2011 Solución:

$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ \frac{x}{2}+3a & \frac{y}{2}+3b & \frac{z}{2}+3c \end{vmatrix} =$

Un determinante en el que los elementos de una línea es suma de varios sumandos es igual a la suma de los determinantes que resultan de tomar los primeros sumandos, los segundos, etc.

$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ \frac{x}{2} & \frac{y}{2} & \frac{z}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} =$

Como el último determinante tiene dos filas proporcionales vale 0.

Como al multiplicar una línea por un número el determinante queda multiplicado por ese número. Podemos sacar el factor 5 de la primera fila multiplicando y el 2 de la tercera dividiendo:

$\frac{5}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{5}{2}\cdot 6 = 15$

- CUESTIÓN A.2: Determine el punto de la recta $r : \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas y del punto $A = (3, 2, 1)$.

selcn Sep 2011 Solución:

Vamos a hallar el plano mediatriz del segmento OA y luego haremos la intersección de la recta con él.

El plano mediatriz π es el perpendicular por el punto medio:

Vector ortogonal a π: $\vec{v} = (3, 2, 1)$; $\pi : 3x+2y+z+D = 0$, pasa por el punto medio $(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})$; $3\frac{3}{2}+2+\frac{1}{2}+D = 0, \quad D = -7, \quad \pi : 3x + 2y + z - 7 = 0$

Ponemos la recta en forma paramétrica: $r : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$ y sustituimos en π:

$3(-3 + 2t) + 2(-5 + 3t) + (-4 + 3t) - 7 = 0; \quad t = 2$ resulta el punto: $\begin{cases} x = -3 + 4 = 1 \\ y = -5 + 6 = 1 \\ z = -4 + 6 = 2 \end{cases}$

El punto pedido es: $(1, 1, 2)$

- CUESTIÓN A.3: Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$, se pide:

  a) Determine los puntos de la gráfica de f para los cuales la recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.

  b) Determine si, para alguno de dichos puntos, la recta tangente a la gráfica coincide con la bisectriz del segundo cuadrante.

  selcn Sep 2011 Solución:

  a) Derivamos: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$, buscamos los puntos en los que la pendiente es -1:

  $f'(x) = -1; \quad 3x^2 - 12x + 8 = -1$ Da como soluciones $x = 1, \quad x = 3$, hay dos puntos en los que la reta tangente a f es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante, sutituimos en f para obtener la otra coordenada del punto de tangencia: $f(1) = 3$; $f(3) = -3$. Los puntos son por tanto $(1, 3), \quad (3, -3)$.

  b) Las rectas tangentes por esos puntos son: $y - y_0 = m(x - x_0)$

  $y - 3 = -1(x - 1); \quad y = -x + 6$

  $y + 3 = -1(x - 3); \quad y = -x$, esta es la bisectriz del segundo cuadrante.

- CUESTIÓN A.4:

  a) Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx$

  b) Evalúe la integral definida $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx$

  selcn Sep 2011 Solución:

  a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx$ es inmediata de la forma arco-tangente $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1 + (f(x))^2} dx$;

  $$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx = -ar\tan(\cos x) + C$$

  b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx = [-ar\tan(\cos x)]_0^{\pi/2} = -ar\tan(\cos \pi/2) + ar\tan(\cos 0) = -ar\tan(0) + ar\tan(1) = \pi/4$

- CUESTIÓN B.1: a) Determine para qué valores del parámetro a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

es regular.

b) Estudie el rango de la matriz A en los casos en que no sea regular.

selcn Sep 2011 Solución:

a) Regular quiere decir que el determinante es distinto de cero.

$\begin{vmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^6 - 2\,a^4 + a^2 = 0$ da como soluciones $a = 0, a = 1, a = -1$

Por tanto la matriz A es regular para a distinto de los valores $a = 0, a = 1, a = -1$

b) Veamos el rango para esos valores:

Para $a = 0$ la matriz es: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0| & 0 & 1 \\ 0| & 1 & 0 \end{pmatrix}$, el menor de orden 2 señalado da el rango que es 2.

Para $a = 1$ la matriz es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que tiene rango 1.

Para $a = -1$ la matriz es: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que tiene rango 1.

- CUESTIÓN B.2: Considérense los puntos $A = (2, 0, 1)$ y $B = (2, 0, 3)$, y la recta

$$r : \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{0}$$

Determine los puntos C de la recta r para los cuales el área del triángulo ABC es 2. (Indicación: hay 2 puntos C que son solución del problema).

selcn Sep 2011 Solución:

Sabemos que el área del paralelogramo determinado por dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, viene dado por $|\vec{a} \wedge \vec{b}|$.

Por tanto queremos que $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = 2$, es decir $\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = 4$.

Ponemos la recta en paramétricas: $r : \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$, luego $\overrightarrow{AB} = (0, 0, 2)$, $\quad \overrightarrow{AC} = (-1 - t - 2, 0, 2 - 1) =$ $(-3 - t, 0, 1)$, sustituyendo:

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ -3-t & 0 & 1 \end{vmatrix} = (6 + 2t)\vec{j}$ vector: $(0, 6 + 2t, 0)$, por tanto el módulo:

$\sqrt{(6 + 2t)^2} = 4; \quad 6 + 2t = \pm 4, \begin{cases} 6 + 2t = 4; \quad t = -1; (0, 0, 2) \\ 6 + 2t = -4; \quad t = -5; (4, 0, 2) \end{cases}$

Los puntos de r solución son $C(0,0,2)$ y $C'(4,0,2)$

- CUESTIÓN B.3: Dada la función $f(x) = x - x^3$, se pide:

  a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1,0)$.

  b) Calcule los puntos de corte de dicha recta con la gráfica de f.

  selcn Sep 2011 Solución:

  a) La recta tangente por un punto de abcisa x_0 es: $y - y_0 = m(x - x_0)$

  $y_0 = f(1) = 0$ como era de esperar.

  $m = f'(1); \quad f'(x) = 1 - 3x^2; \quad f'(1) = -2$

  La tangente a la curva es $y = -2(x-1), \quad y = -2x + 2$

  b) Los puntos de corte entre las dos resultan de resolver en sistema:

  $\left\{ \begin{array}{l} y = x - x^3 \\ y = -2x + 2 \end{array} \right. ; \quad x - x^3 = -2x + 2; \quad x^3 - 3x + 2 = 0$

  $\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$; Queda: $x^2 + x - 2 = 0; x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ -2 \end{array} \right.$

  Por tanto la tangente y la curva se cortan en $(1,0)$ punto de tangencia y en $(-2,6)$.

- CUESTIÓN B.4:

  a) Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int x^2 e^x dx$

  b) Evalúe la integral definida $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x dx$

  selcn Sep 2011 Solución:

  a)

  $\displaystyle\int x^2 e^x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array} \right\} = x^2e^x - \int 2xe^x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = 2x & du = 2dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array} \right\} = x^2e^x - \left[2xe^x - \int 2e^x dx \right] =$
  $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

  b) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x dx = \left[x^2e^x - 2xe^x + 2e^x \right]_0^1 = e - 2e + 2e - (0 - 0 + 2) = e - 2$

10.2. Junio 2011

- CUESTIÓN A.1:

  Demuestre, sin utilizar la regla de Sarrus y sin desarrollar directamente por una fila y/o columna, que $A = \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0$

  Indique en cada paso qué propiedad (o propiedades) de los determinantes se está utilizando.

  selcn Jun 2011 Solución:

  Triángulando: Aplicamos que un determinante no varía si a una fila le sumamos una combinación lineal de las demás

  $$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} 2^a\text{fila} - 1^a \\ 3^a\text{fila} - 1^a \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

  Que por tener la segunda fila proporcional a la tercera vale 0

- CUESTIÓN A.2: Determine el plano que contiene a la recta $s : \left. \begin{array}{r} 3x + 2y - 5z = -2 \\ 4x - 3y - 2z = -1 \end{array} \right\}$

  y es paralelo a la recta $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-17}{-1}$

  selcn Jun 2011 Solución:

  Consideramos el haz de planos que contiene a la primera recta:

  $3x + 2y - 5z + 2 + t(4x - 3y - 2z + 1) = 0; \quad (3+4t)x + (2-3t)y - (5+2t)z + 2 + t = 0$

  Si el plano ha de ser paralelo a la recta el vector ortogonal del plano: $(3+4t, 2-3t, -5-2t)$ ha de ser perpendicular al vector dirección de la recta: $(3, -2, -1)$. Por tanto el producto escalar ha de ser 0.

  $3(3+4t) - 2(2-3t) + (-1)(-5-2t) = 0; \quad 20t + 10 = 0; \quad t = -\dfrac{1}{2}$

  Sustituyendo tenemos el plano pedido: $2x + 7y - 8z + 3 = 0$

- CUESTIÓN A.3:

  Dada la función $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$, se pide:

  a) Estudiar si existen asíntotas verticales y calcular los límites laterales en caso de que las haya.

  b) Estudiar si existen asíntotas horizontales y calcularlas en caso de que las haya.

  selcn Jun 2011 Solución:

  a) Por las características de la exponencial el denominador se aproximará a 0 cuando x se acerque 0.

  Estudiemos los límites laterales

  $$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

  $$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{2}{0^+} = \infty$$

Hay asíntota vertical en $x = 0$

b) Asíntota horizontal $y = n$: $\quad n = \lim_{x \to \infty} f(x)$

Por incluir la función exponencial tendremos que estudiar los dos lados

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ Dividiendo numerador y denominador por e^x, resulta:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{e^x}{e^x} + \frac{1}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x} - \frac{1}{e^x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

Como $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, resulta para el otro lado:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

Luego por la izquierda $-\infty$ la asíntota es $y = -1$, y por la derecha ∞ la asíntota es $y = 1$

- CUESTIÓN A.4:

  a) Calcule la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$ utilizando el método de cambio de variable (o método de sustitución).

  b) Calcule la integral definida $\int_0^1 \ln(1 + x^2) dx$, donde ln denota la función logaritmo neperiano, utilizando el método de integración por partes.

  selcn Jun 2011 Solución:

  $$\text{a) } \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt; \quad dx = 2t\, dt \end{array} \right\} = \int \frac{t}{1+t} 2t\, dt = 2 \int \frac{t^2}{1+t} dt = \begin{array}{l} \text{dividiendo} \\ \text{cociente} = t - 1 \\ \text{resto} = 1 \end{array}$$

  $$2 \int \left(t - 1 + \frac{1}{1+t} \right) dt = 2 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|1+t| \right) = t^2 - 2t + 2\ln|1+t| = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(\sqrt{x} + 1) + C$$

  $$\text{b) } \int \ln(1+x^2) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(1+x^2), \quad du = \frac{2x}{1+x^2} dx \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right\} = x \ln(1+x^2) - \int x \frac{2x}{1+x^2} dx$$

  Hagamos ahora $\int \frac{2x^2}{1+x^2} dx = \begin{array}{l} \text{dividiendo} \\ \text{cociente} = 2 \\ \text{resto} = \text{-2} \end{array} = \int \left(2 - \frac{2}{1+x^2} \right) dx = 2x - 2ar\tan x$

  Luego $\int \ln(1+x^2) dx = x\ln(1+x^2) - 2x + 2ar\tan x + C$

  $$\int_0^1 \ln(1+x^2) dx = \left[x\ln(1+x^2) - 2x + 2ar\tan x \right] = \ln 2 - 2 + 2\frac{\pi}{4} = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

- CUESTIÓN B.1:

  Discuta, en función de los parámetros a y b, el siguiente sistema de ecuaciones. No hay que resolverlo.

  $$\left\{ \begin{array}{l} x + ay + 2z = 3 \\ x - 3y - z = -1 \\ -x + 8y + 4z = b \end{array} \right.$$

  selcn Jun 2011 Solución:

El determinante de la matriz de coeficientes es: $|M| = 6 - 3a$

Que se anula para $a = 2$, por tanto:

Para $a \neq 2$ y $\forall b$, rango$(M) = 3 =$ rango$(A) =$ número de incógnitas: sistema compatible determinado.

Para $a = 2$ queda el sistema: $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 2z = 3 \\ x - 3y - z = -1 \\ -x + 8y + 4z = b \end{array}\right.$

Consideramos el determinante obtenido de la matriz ampliada que resulta de quitar la segunda columna, las dos primeras columnas incluyen un menor de orden 2 no nulo:

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & 4 & b \end{array}\right| = 15 - 3b$$

Que se anula para $b = 5$, por tanto:

Para $a = 2$ y $b \neq 5$, rango$(M) = 2 < 3 =$rango(A): sistema incompatible.

Para $a = 2$ y $b = 5$, rango(M)=2 = rango$(A) < 3 =$ número de incógnitas: sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones dependientes de un parámetro.

- CUESTIÓN B.2:

Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por el vértice de un triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice. a) Calcule las tres medianas del triángulo de vértices $A = (5, -1, 4), B = (-1, 7, 6)$ y $C = (5, 3, 2)$.

b) Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto (llamado baricentro) y calcule las coordenadas de dicho punto.

selcn Jun 2011 Solución:

a) Mediana del vértice A: punto medio del lado BC : $\left(\dfrac{-1+5}{2}, \dfrac{7+3}{2}, \dfrac{6+2}{2}\right) = (2, 5, 4)$; el vector que une A con el punto medio es: $(2 - 5, 5 + 1, 4 - 4) = (-3, 6, 0)$ como sólo interesa la dirección tomamos el vector $\vec{v_A} = (-1, 2, 0)$;

la mediana de A es $\left\{\begin{array}{l} x = 5 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 \end{array}\right.$

Mediana del vértice B: punto medio del lado AC : $\left(\dfrac{5+5}{2}, \dfrac{-1+3}{2}, \dfrac{4+2}{2}\right) = (5, 1, 3)$; el vector que une B con el punto medio es: $(5 + 1, 1 - 7, 3 - 6) = (6, -6, -3)$ como sólo interesa la dirección tomamos el vector $\vec{v_B} = (-2, 2, 1)$;

la mediana de B es $\left\{\begin{array}{l} x = -1 - 2t \\ y = 7 + 2t \\ z = 6 + t \end{array}\right.$

Mediana del vértice C: punto medio del lado AB : $\left(\dfrac{5-1}{2}, \dfrac{-1+7}{2}, \dfrac{4+6}{2}\right) = (2, 3, 5)$; el vector que une C con el punto medio es: $(2 - 5, 3 - 3, 5 - 2) = (-3, 0, 3)$ como sólo interesa la dirección tomamos el vector $\vec{v_C} = (-1, 0, 1)$;

la mediana de C es $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3 \\ z = 2 + t \end{cases}$

b) Vamos a calcular el punto de corte entre las medianas de A y de C, ponemos como parámetro s en vez de t en la de A

$\begin{cases} x = 5 - s \\ y = -1 + 2s \\ z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3 \\ z = 2 + t \end{cases}$

Igualando coordenadas: $\begin{cases} 5 - s = 5 - t \\ -1 + 2s = 3 \\ 4 = 2 + t \end{cases}$ La solución es $t = 2, s = 2$ Sustituimos en la mediana de A para obtener el punto que será el baricentro:

$\begin{cases} x = 5 - 2 \\ y = -1 + 4 \\ z = 4 \end{cases}$ Resulta: Baricentro: $G(3, 3, 4)$

Comprobemos que este punto está en la mediana de B y con ello habremos respondido a todo lo que piden:

$\begin{cases} 3 = -1 - 2t' \\ 3 = 7 + 2t' \\ 4 = 6 + t' \end{cases}$ se verifica efectivamente para $t' = -2$

Nota: Las coordenadas del baricentro vienen dadas directamente por la media aritmética de las coordenadas de los vértices del triángulo: $G = \left(\frac{5 - 1 + 5}{3}, \frac{-1 + 7 + 3}{3}, \frac{4 + 6 + 2}{3}\right) = (3, 3, 4)$

- CUESTIÓN B.3:

Las manecillas de un reloj miden 4 y 6 cm; uniendo sus extremos se forma un triángulo.

a) Demuestre que el área de dicho triángulo viene dada por la función $A(x) = 12\,\text{sen}(x)$, donde x denota el ángulo formado por las manecillas del reloj.

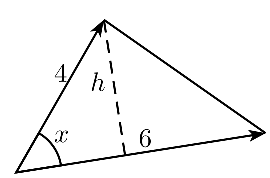
b) Determine el ángulo que deben formar las manecillas del reloj para que el área de dicho triángulo sea máxima ¿Cuál es el valor de dicha área máxima? Se puede utilizar el apartado a) aunque no se haya demostrado.

selcn Jun 2011 Solución:

a)

Área $= \frac{b \cdot h}{2}$, como $h = 4\,\text{sen}\, x$. Resulta:

$A(x) = \frac{6 \cdot 4 \cdot \text{sen}(x)}{2} = 12\,\text{sen}\, x$



b) Derivando: $A'(x) = 12 \cos x$ que se anula para $x = \frac{\pi}{2}$

x		$\frac{\pi}{2}$	
A'	$+$		$-$
A	$\nearrow$		$\searrow$
		MÁXIMO	

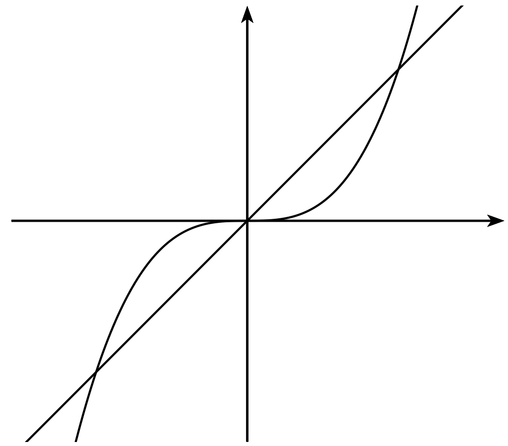
El valor del área máxima es pues $A(\frac{\pi}{2}) = 12\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 12$ cm^2

- CUESTIÓN B.4:

a) Dada la función $f(x) = \dfrac{3x}{1-x^2}$ definida para los valores $-1 < x < 1$, determine los puntos de corte de la recta $y = 4x$ con la gráfica de f .

b) Calcule el área del recinto limitado por la recta $y = 4x$ y la gráfica de f .

selcn Jun 2011 Solución:



a) Busquemos los puntos de corte:

$s: \begin{cases} y = 4x \\ y = \dfrac{3x}{1-x^2} \end{cases} \qquad 4x = \dfrac{3x}{1-x^2}, \quad 1 - x^2 = \dfrac{3}{4}, \quad x^2 = \dfrac{1}{4}$

Los puntos de corte son: $x = 0, x = \pm\dfrac{1}{2}$

b) Como la figura es simétrica respecto al origen haremos la integral de la mitad:

Primero la primitiva: $\displaystyle\int (4x - \frac{3x}{1-x^2})dx = \frac{4x^2}{2} + \frac{3}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}dx = 2x^2 + \frac{3}{2}\ln|1-x^2|$

La integral definida:

$$\int_0^{1/2} (4x - \frac{3x}{1-x^2})dx = \left[2x^2 + \frac{3}{2}\ln|1-x^2|\right]_0^{1/2} = 2\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\ln(1 - \frac{1}{4}) - 0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ln(\frac{3}{4})$$

Área encerrada por las dos curvas: $S = 1 + 3\ln(\frac{3}{4}) = 0{,}13695$

Selectividad Matemáticas II (Murcia) 11

Año 2010

11.1. Septiembre 2010

- CUESTIÓN 1.A. Definición de rango de una matriz. Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro k.

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

  selcn Sep 2010 Solución:

  Hacemos un determinante del mayor orden posible, empezamos con el formado por las tres columnas que no incluyen parámetro: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

  Podemos eliminar la última fila que es combinación lineal de las otras.

  Orlamos el menor de orden 2 no nulo con la restante fila: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 2k + 2$ Por tanto:

  Si $k \neq -1, r(A) = 3$; Si $k = -1, r(A) = 2$.

- CUESTIÓN 2.A. Calcular el punto más cercano al punto $P = (1, 0, -1)$ de entre todos los puntos del plano determinado por los puntos $Q = (2, 2, 1), R = (0, 1, 2)$ y $S = (0, 0, 1)$. Calcular la distancia de punto P al plano.

  selcn Sep 2010 Solución: Hallamos la ecuación del plano, para ello consideramos el punto $S = (0, 0, 1)$, y los vectores dirección: $\overrightarrow{SQ} = (2, 2, 0)$, $\overrightarrow{SQ} = (0, 1, 1)$

  $$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2z - 2y + 2x - 2, \quad \pi : x - y + z - 1 = 0$$

  Ahora hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por $P = (1, 0, -1)$:

  Como vector dirección de la recta nos sirve el vector ortogonal del plano:

$r:\begin{cases} P(1,0,-1) \\ \vec{v}=(1,-1,1)\end{cases} \quad \begin{cases} x=1+t \\ y=0-t \\ z=-1+t\end{cases}$

Para hallar el punto de intersección sustituimos las paramétricas de r en la general de π :

$1+t+t-1+t-1=0; \quad 3t-1=0; \quad t=\frac{1}{3}; \begin{cases} x=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3} \\ y=0-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3} \\ z=-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}\end{cases}$

El punto del plano más próximo a P es el $(\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$

La distancia entre los dos puntos que es la distancia de P al plano es:

$$d=\sqrt{(1-\frac{4}{3})^2+(0+\frac{1}{3})^2+(-1+\frac{2}{3})^2}=\sqrt{(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^2+(\frac{-1}{3})^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=0'577350$$

- CUESTIÓN 3.A. Dada la función $f(x)=\dfrac{x+1}{4-x^2}$se pide:

i) Dominio y cortes con los ejes.

ii) Estudiar si existen asíntotas verticales y calcular los límites laterales.

iii) Estudiar si existen asíntotas horizontales u oblicuas y calcularlas.

iv) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.

v) Representación gráfica aproximada.

selcn Sep 2010 Solución:

a) Dominio y regionamiento: Hallando las raíces de numerador y denominador resulta que delimitan región de cambio de signo de y : $\quad x=-1, x=\pm 2$

x		-2		-1		2	
y	$+$		$-$		$+$		$-$

$y=\dfrac{x+1}{4-x^2}$

Por tanto: Dominio $=R-\{-2,2\}$

b) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con OY : $x=0$, resulta $y=\dfrac{1}{4}$

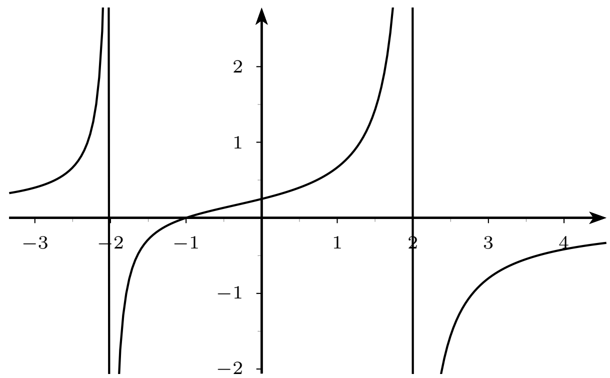
con OX : $y=0$, resulta $x+1=0, \quad x=-1$

c) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales, valores de x que anulan al denominador: $x = -2, x = 2$

Asíntota horizontal $y = n$: $n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{4-x^2} = 0$; $y = 0$



d) Extremos y crecimiento: $f'(x) = \dfrac{x^2+2x+4}{(4-x^2)^2}$ Anulamos: $x^2 + 2x + 4 = 0$ no tiene solución, luego la derivada es siempre positiva y por tanto la función es siempre creciente

Veamos ahora los límites laterales en las asíntotas verticales que pide expresamente el problema:

- $x = -2$

  $$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x+1}{4-x^2} = \left\{\frac{-1}{0^-}\right\} = \infty$$

  $$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x+1}{4-x^2} = \left\{\frac{-1}{0^+}\right\} = -\infty$$

- $x = 2$

  $$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{4-x^2} = \left\{\frac{3}{0^+}\right\} = \infty$$

  $$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{4-x^2} = \left\{\frac{3}{0^-}\right\} = -\infty$$

- CUESTIÓN 4.A. Enunciar el teorema fundamental del cálculo integral y calcular la integral siguiente:

$$\int \frac{x^2}{x^2-9}dx$$

selcn Sep 2010 Solución:

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & & x^2-9 \\ \cline{3-3} -x^2 & +9 & 1 \\ \hline & 9 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2-9}dx = \int (1 + \frac{9}{x^2-9})dx = x + \int \frac{9}{x^2-9}dx$$

Planteamos la descomposición en fracciones simples

$$\frac{9}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-3)}{x^2-9}$$

Identificando numeradores: $9 = A(x+3) + B(x-3)$, para $x = -3$ resulta $9 = -6B$, luego $B = -\frac{3}{2}$; para $x = 3$ queda $9 = 6A$ luego $A = \frac{3}{2}$, sustituyendo:

$$\int \frac{x^2}{x^2-9}dx = x + \int \left(\frac{\frac{3}{2}}{x-3} - \frac{\frac{3}{2}}{x-3}\right)dx = x + \frac{3}{2}\ln|x-3| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + C$$

- CUESTIÓN 1.B. Discutir y resolver el sistema siguiente en función de los posibles valores del parámetro k.

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+4z=0 \\ -2x-4z=0 \\ x-y+z=k \end{array}\right.$$

selcn Sep 2010 Solución:

Hacemos el determinante de la matriz de coeficientes: $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Luego el rango de la matriz de coeficientes es 2.

Orlamos el menor no nulo señalado con la columna de términos independientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = 4k$$

Por tanto:

Para $k \neq 0$ $\text{ran}(M) = 2 \neq 3 = \text{ran}(A)$, incompatible.

Para $k = 0$ $\text{ran}(M) = 2 = \text{ran}(A) < 3$ número de incógnitas, sistema compatible indeterminado, soluciones dependientes de un parámetro.

Para dar la solución escogemos las dos primeras ecuaciones y pasamos z el segundo miembro para que quede como parámetro:

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+4z=0 \\ -2x-4z=0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x+2y=-4z \\ -2x=4z \end{array}\right. \qquad x=-2z, y=-z, z \in R$$

- CUESTIÓN 2.B. Estudiar la posición relativa de las rectas

$r: \quad x+1=y=1-z$

$$s: \quad \left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2-\lambda \end{array}\right\}$$

y calcular la distancia entre ellas.

selcn Sep 2010 Solución:

Veamos punto y vector dirección de cada recta:

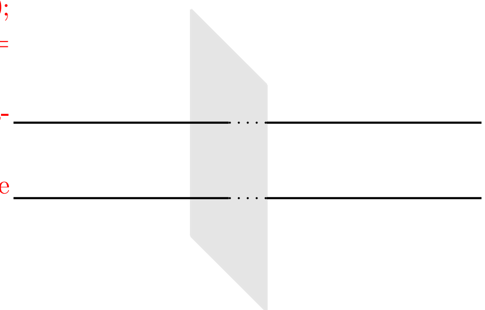
$r : x+1 = y = \dfrac{z-1}{-1} \quad \begin{cases} P_1(-1,0,1) \\ \vec{v_1} = (1,1,-1) \end{cases} \qquad s : \quad \begin{cases} P_2(0,1,2) \\ \vec{v_2} : (1,1,-1) \end{cases}$

Por tanto las rectas son paralelas.

Hallemos el plano π perpendicular a r por el punto $\pi : x+y-z+D = 0$; hacemos que pase por $P_1(-1,0,1)$: $\quad -1-1+D = 0; \quad \pi : x+y-z+2 = 0$

Ahora hacemos la intersección de la recta s con π, sustituyendo las paramétricas de s en la ecuación de π:

$\lambda + 1 + \lambda - (2-\lambda) + 2 = 0; \quad 3\lambda + 1 = 0; \lambda = -\dfrac{1}{3}$, queda el punto de



intersección: $\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} \\ y = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ z = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \end{array}$, es el punto $Q(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{7}{3})$

$d(r,s) = d(P_1,Q) = \sqrt{(-1+\dfrac{1}{3})^2 + (-\dfrac{2}{3})^2 + (1-\dfrac{7}{3})^2} = \sqrt{(\dfrac{2}{3})^2 + (\dfrac{1}{3})^2 + (\dfrac{1}{3})^2} = \sqrt{\dfrac{24}{9}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

- CUESTIÓN 3.B. Definición de derivada de una función en un punto. Demostrar que la derivada de la función $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$.

  selcn Sep 2010 Solución:

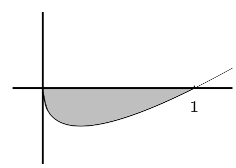
  $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2xh+h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x+h) = 2x$

- CUESTIÓN 4.B. Calcular el área de la región delimitada por el eje x y la función $f(x) = x - \sqrt{x}$.

  selcn Sep 2010 Solución:

  Para representar hallamos los puntos de corte con OX se hace $y = 0$ y resulta:

  $x - \sqrt{x} = 0; \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

  $S : \quad \displaystyle\int_0^1 x - \sqrt{x} dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$

  Por tanto el área encerrada con OX es $\frac{1}{6}u^2$

11.2. Junio 2010

- CUESTIÓN 1.A.

  Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.

  $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  selcn Jun 2010 Solución:

  $$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \text{ por tanto existe inversa } A^{-1}=\frac{1}{|A|}[adj(A^t)]$$

  $$A^t=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};adj(A^t)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

  $$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- CUESTIÓN A.2

  Calcular el punto más cercano al punto $P=(1,3,0)$ de entre todos los puntos de la recta determinada por el punto $Q=(-2,2,1)$ y el vector $\vec{v}=(1,1,1)$. Calcular la distancia del punto P a la recta.

  selcn Jun 2010 Solución:

  Hallemos el plano π perpendicular a r por el punto $P=(1,3,0)$: $\pi : x+y+z+D=0$; hacemos que pase por $P=(1,3,0):\quad 1+3+D=0;\quad \pi : x+y+z-4=0$

  Ahora hacemos la intersección de la recta r con π, sustituyendo las paramétricas de r en la ecuación de π:

  $$r:\quad \begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

  $-2+\lambda+2+\lambda+1+\lambda+1+\lambda-4=0;\lambda=1$, queda el punto de intersección: $\begin{array}{l} x=-2+1=-1 \\ y=2+1=3 \\ z=1+1=2 \end{array}$, es el punto $Q*(3-1,3,2)$

  $d(P,r)=d(P,Q*)=\sqrt{(3-1)^2+(3-3)^2+(2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$

- CUESTIÓN A.3

  Dada la función $f(x)=\sqrt{4+x^2}$, se pide:

  i) Dominio y cortes con los ejes.

  ii) Estudio de simetrías y de regiones para el signo de $f(x)$.

iii) Estudiar si existen asíntotas horizontales u oblicuas.

iv) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.

v) Representación gráfica aproximada.

selcn Jun 2010 Solución:

a) Dominio y regionamiento: La función existe para cualquier valor de x, luego el dominio es R.

La función es positiva siempre, la gráfica está por encima del eje horizontal.

b) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con OY : $x = 0$, resulta $y = 2$

con OX : $y = 0$, resulta $4 + x^2 = 0$ que no tiene soluciones

c) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

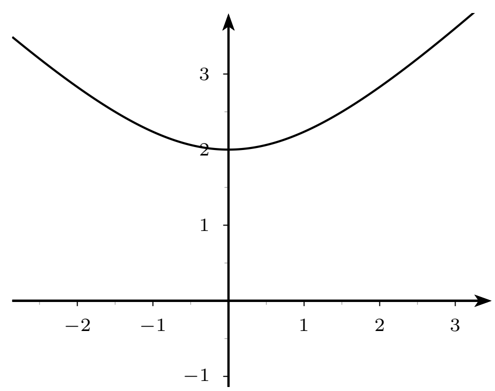
verticales valores de x en los que la función se va a infinito: no hay.

Asíntota horizontal $y = n$: $n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{4+x^2} = \infty$, no hay.

Asíntota oblicua $y = mx + n$ $m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x} = 1$

$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{4+x^2} - x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{(\sqrt{4+x^2}-x)(\sqrt{4+x^2}+x)}{\sqrt{4+x^2}+x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{4+x^2-x^2}{\sqrt{4+x^2}+x} = 0$

La asíntota oblicua es: y=x



d) Extremos y crecimiento: $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

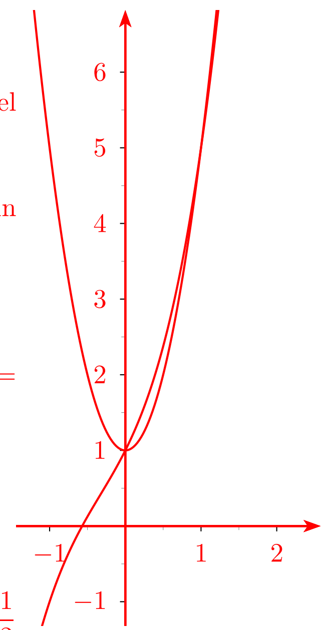
x		0	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$	MÍNIMO	$\nearrow$

- CUESTIÓN A.4

Calcular el área encerrada por las curvas $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = 4x^2 + 1$

selcn Jun 2010 Solución:

$f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = 4x^2 + 1$.
Representamos la cúbica: $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$
Puntos de corte
Con OX : $y = 0$, $x^3 - 2x^2 + 2x = 0$, probamos $x = 1$ y $x = -1$, divisores del término independiente y no son solución.
Crecimiento de $f(x)$
$f'(x) = 3x^2 + 2x + 2$, anulamos: $3x^2 + 2x + 2 = 0$, resulta $x = \frac{2 \pm \sqrt{4-24}}{6}$ sin solución real luego $f'(x) > 0$ siempre luego la cúbica es siempre creciente.



Corte entre la parábola y la cúbica:
$x^3 + x^2 + 2x + 1 = 4x^2 + 1$.
$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \quad x(x^2 - 3x + 2); \quad x = 0; \quad x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{2 \pm 1}{2}; \quad x = 1, x = 2$

Area $\displaystyle\int_0^1$ cúbica - parábola + $\displaystyle\int_1^2$ parábola- cúbica

$$= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x)dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right]_1^2 = \frac{1}{4} - 1 + 1 - 4 + 8 - 4 + \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{2}$$

- CUESTIÓN B.1

Enunciar el teorema de Rouche-Fröbenius. Aplicar dicho teorema para discutir si el sistema siguiente tiene solución y si la solución es única en función de los posibles valores del parámetro k (no es necesario resolver el sistema).

$$\begin{cases} x - y + z = k \\ 3x - 3y = 0 \\ x + ky + 3z = 1 \end{cases}$$

selcn Jun 2010 Solución:

Hacemos el determinante de la matriz de coeficientes: $|M| = \begin{vmatrix} 1| & -1 & 1 \\ 3| & -3 & 0 \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix} = 3k + 3$

Luego para $k \neq -1$ ran$(M) = 3 =$ ran$(A)=$ número de incógnitas, sistema compatible determinado.

Para $k = -1$ ran$(M) = 2$

Orlamos el menor no nulo señalado con la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

Por tanto:

Para $k = -1$ ran$(M) = 2 \neq 3 =$ ran(A), incompatible.

- CUESTIÓN B.2

Comprobar que las rectas

$$r: \quad x + 1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$$

y

$$s: \quad \left.\begin{array}{l} y=\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2-\lambda \end{array}\right\}$$

no se cortan y no son paralelas. Calcular la distancia entre ellas.

selcn Jun 2010 Solución:

Como las rectas no son paralelas, (los vectores dirección no son proporcionales) , la distancia entre las dos rectas viene dada por la distancia de un punto de r_2 al plano que contiene a r_1 y es paralelo a r_2.

Veamos punto y vector dirección de cada recta:

$$r: x+1=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3} \quad \left\{\begin{array}{l} P_1(-1,-2,1) \\ \vec{v_1}=(1,2,3) \end{array}\right. \qquad s: \quad \left.\begin{array}{l} y=\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2-\lambda \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} P_2(0,1,2) \\ \vec{v_2}:(1,1,-1) \end{array}\right.$$

Plano π conteniendo a r y paralelo a s es $\pi: \begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0; \quad \pi: 5x-4y+z-4=0$

$$d(r,s)=d(P_2,\pi)=\left|\frac{-4+2-4}{\sqrt{25+16+1}}\right|=\frac{6}{\sqrt{42}}$$

- CUESTIÓN B.3

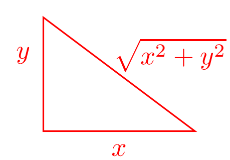
La vela mayor de un barco tiene forma de triángulo rectángulo. Sabiendo que la hipotenusa debe medir 6 metros, calcular sus dimensiones para que la superficie de la vela sea máxima.

selcn Jun 2010 Solución:

Área: $S=\dfrac{x\cdot y}{2}$ máxima

Pitágoras: $x^2+y^2=6^2$. Despejamos y: $y=\sqrt{36-x^2}$

Sustituyendo en S:



$$S(x)=\frac{x\cdot\sqrt{36-x^2}}{2}=\frac{\sqrt{36x^2-x^4}}{2}=\text{ ha de ser máxima}$$

$$S'(x)=\frac{72x-4x^3}{4\sqrt{36x^2-x^4}}=0; \quad 72x-4x^3=0 \quad x=-3\sqrt{2}, x=3\sqrt{2}, x=0$$

x		$3\sqrt{2}$	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$

Resulta área máxima para el triángulo rectángulo isósceles de catetos $3\sqrt{2}$

- CUESTIÓN B.4

Calcular la integral siguiente: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-x-2}dx$

selcn Jun 2010 Solución:

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & & x^2-x-2 \\ \cline{3-3} -x^2 & +x+2 & 1 \\ \hline & +x+2 & \end{array}$$

Hallemos la primitiva:

$$\int \frac{x^2}{x^2-x-2}dx = \int (1+\frac{x+2}{x^2-x-2})dx = x + \int \frac{x+2}{x^2-x-2}dx$$

Planteamos la descomposición en fracciones simples, las raíces del denominador son $-1, 2$

$$\frac{x+2}{x^2-x-2} = \frac{x+2}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{x^2-x-2}$$

Identificando numeradores: $x+2 = A(x-2)+B(x+1)$, para $x=2$ resulta $4=3B$, luego $B=\frac{4}{3}$; para $x=-1$ queda $1=-3A$ luego $A=\frac{-1}{3}$, sustituyendo:

$$\int \frac{x^2}{x^2-x-2}dx = x + \int \left(\frac{\frac{-1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{4}{3}}{x-2}\right)dx = x - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{4}{3}\ln|x-2| + C$$

Por tanto:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-x-2}dx = \left[x - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{4}{3}\ln|x-2|\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{4}{3}\ln 2 = 1 - \frac{5}{3}\ln 2 = -0'1552$$

Selectividad Matemáticas II (Murcia) 12

Año 2009

12.1. Septiembre 2009

- CUESTIÓN 1.A.

  Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.

  $$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

  selcn Sept 2009 Solución: $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ por tanto existe inversa $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}[adj(A^t)]$

  $$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; adj(A^t) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 11 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

  $$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -5/2 & 1 \end{pmatrix}$$

- CUESTIÓN 1.B.

  Clasificar el sistema siguiente según los valores del parámetro.

  $$\left.\begin{array}{r} ax + y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ -3x + z = 0 \end{array}\right\}$$

  selcn Sept 2009 Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2a - 12 = 0; \quad a = 6;$$

Para $a \neq 6$ el sistema homogéneo tiene solo la solución trivial.

Para $a = 6$ el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones dependientes de un parámetro.

- CUESTIÓN 2.A.

  Calcule el punto de la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = z - 1$ más cercano al punto $P = (1, -2, -7)$.

  selcn Sept 2009 Solución:

  El punto buscado es el punto de intersección de la recta con el plano π perpendicular a la recta por el punto P.

  Para hallar el plano sirve como vector ortogonal el de dirección de la recta $(2, 3, 1)$

  $\pi : 2x + 3y + z + D = 0$ haciendo que pase por $P = (1, -2, -7)$, $2 - 6 - 7 + D = 0$ resulta $D = 11$, luego $\pi : 2x + 3y + z + 11 = 0$

  Para hallar el punto de corte ponemos la recta como intersección de planos y resolvemos el sistema que forman con la ecuación de π

  $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = z - 1 \left\{ \begin{array}{r} 3x - 2y = 3 \\ y - 3z = -3 \end{array} \right.$

  Queda el sistema: $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = z - 1 \left\{ \begin{array}{r} 2x + 3y + z = -11 \\ 3x - 2y = 3 \\ y - 3z = -3 \end{array} \right.$ que resuelto queda $x = -1, y = -3, z = 0$

  que son las coordenadas del punto de la recta r más cercano al punto P.

- CUESTIÓN 2.B.

  Calcule la distancia entre las rectas: $r_1 : x = y = z; \quad r_2 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = z - 1$

  selcn Sept 2009 Solución: Como las rectas no son paralelas, la distancia entre las dos rectas viene dada por la distancia de un punto de r_2 al plano que contiene a r_1 y es paralelo a r_2.

  Veamos punto y vector dirección de cada recta:

  $r_1 : x = y = z \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1(0, 0, 0) \\ \vec{v_1} = (1, 1, 1) \end{array} \right. \qquad r_2 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = z - 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} P_2(1, 0, 1) \\ \vec{v_2} : (2, 3, 1) \end{array} \right.$

  Plano π conteniendo a r_1 y paralelo a r_2 es $\pi : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \pi : -2x + y + z = 0$

  $d(r_1, r_2) = d(P_2, \pi) = \dfrac{-2 + 1}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

- CUESTIÓN 3.A.

Dada la función $f(x) = \dfrac{x-5}{1-x}$ se pide:

i) Dominio y cortes con el eje x.

ii) Asíntotas verticales (calculando los límites laterales).

iii) Asíntotas horizontales y oblicuas.

iv) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.

v) Representación gráfica aproximada

selcn Sept 2009 Solución:

La función es una hipérbola pero como piden el estudio completo lo haremos.

1) Dominio y cortes con el eje x $\quad f(x) = \dfrac{x-5}{1-x}$

Las raíces de numerador nos dan el punto de corte con el eje x por tanto $x = 5$

Las raíces del denominador los puntos en que no existe la función: El dominio es $R - \{1\}$

2) Asíntotas verticales (calculando los límites laterales) Corresponden con valores de x donde la función se va a infinito, en este caso donde se anula el denominador en $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-5}{1-x} ='' \frac{-5}{0^+}'' = -\infty$$

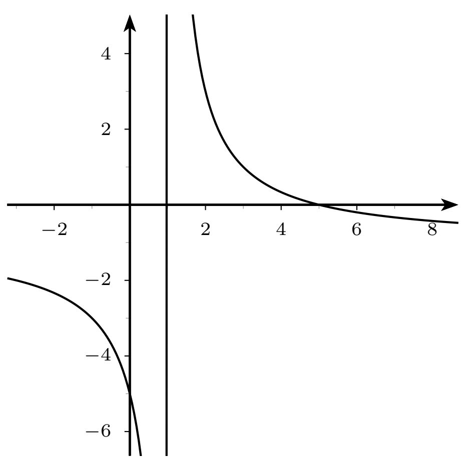
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-5}{1-x} ='' \frac{-5}{0^-}'' = +\infty$$

3) Asíntotas horizontales y oblicuas: Asíntotas horizontales: $y = n$

$n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x-5}{1-x} = -1$ Resulta asíntota horizontal: $y = -1$

4) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos Estudiamos el signo de la derivada

$f'(x) = \dfrac{-4}{(x-1)^2} < 0 \quad \forall x \in R$; al ser negativa la derivada, la función siempre es decreciente y no tiene extremos.



- CUESTIÓN 3.B.

Calcule las dimensiones de un vaso de cristal de forma cilíndrica con volumen igual a 250 centímetros cúbicos para que la superficie de cristal se mínima (Indicación: Vol= $\cdot r^2\ h$)

selcn Sept 2009 Solución:

Superficie (una base): $S = \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$

Volumen: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 250$

Despejamos h en el volumen $h = \dfrac{250}{\pi r^2}$ y sustituimos en la superficie que quedará solo en función de r:

$S(r) = \pi r^2 + \dfrac{2\pi r 250}{\pi r^2} = \pi r^2 + \dfrac{500}{r}$

Derivando y anulando la derivada:

$S'(r) = 2\pi r - \dfrac{500}{r^2} = \dfrac{2\pi r^3 - 500}{r^2} = 0$

Para resolver la ecuación anulamos el numerador y despejamos r:

$2\pi r^3 - 500 = 0; \quad r^3 = \dfrac{250}{\pi}; \quad r = \dfrac{5\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 4'3012\text{cm}$

Comprobemos con el crecimiento que corresponde con un mínimo:

x		$\frac{5\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}}$	
$S'(x)$	$-$		$+$
$S(x)$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

- CUESTIÓN 4.A.

  i) Enunciar el teorema fundamental del cálculo.

  ii) Calcular la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx$

  selcn Sept 2009 Solución:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x & x \\ \hline -x & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}dx = \int (x - \frac{x}{x^2+1})dx = \int (x - \frac{x}{x^2+1})dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

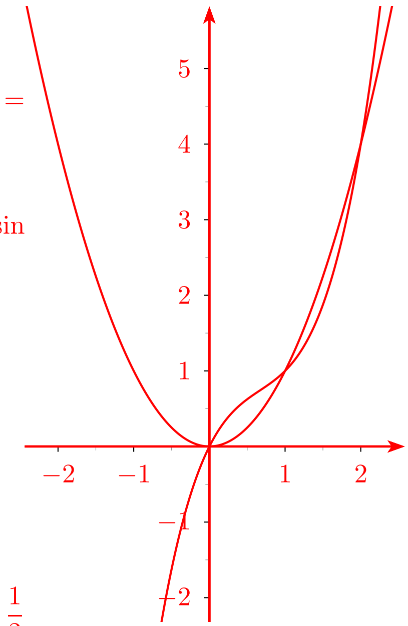
$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 - 0 \approx 0'153$$

- CUESTIÓN 4.B.

  Calcular el área encerrada por las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$.

  selcn Sept 2009 Solución:

$f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$.
Representamos la cúbica:
Puntos de corte
Con OX : $y = 0$, $x^3 - 2x^2 + 2x = 0; x(x^2 - 2x + 2) = 0$; $x = 0$; $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$ Él único corte con los ejes es en el origen
Crecimiento de $f(x)$
$g'(x) = 3x^2 - 4x + 2$, anulamos: $3x^2 - 4x + 2 = 0$, resulta $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-24}}{2}$ sin solución real luego $g'(x) > 0$ siempre luego la cúbica es siempre creciente.



Corte entre la parábola y la cúbica:
$x^3 - 2x^2 + 2x = x^2$; $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$$x(x^2 - 3x + 2); \quad x = 0; \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{2 \pm 1}{2}; \quad x = 1, x = 2$$

Area $\displaystyle\int_0^1$ cúbica - parábola + $\displaystyle\int_1^2$ parábola- cúbica

$$= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x)dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right]_1^2 = \frac{1}{4} - 1 + 1 - 4 + 8 - 4 + \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{2}$$

12.2. Junio 2009

- CUESTIÓN 1.A.

  Calcular el rango de la matriz A según los valores del parámetro.

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

  selcn Junio 2009 Solución:

  Hacemos un determinante del mayor orden posible, empezamos con el formado por las tres primeras columnas:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

  Orlamos el menor de orden 2 no nulo con la cuarta columna: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} == 4a - 8$ Por tanto:

  Si $a \neq 2, r(A) = 3$; Si $a = 2, r(A) = 2$.

- CUESTIÓN 1.B.

  Estudiar si el sistema siguiente tiene solución y, en ese caso, resolver por Cramer.

  $$\left.\begin{array}{r} x - y + z = -3 \\ -x - y = 1 \\ x - 2z = -1 \end{array}\right\}$$

  selcn Junio 2009 Solución:

  El determinante de la matriz de coeficientes es $|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 5$

  Por tanto ran(M) =3 = ran(A) $= n^0$ incógnitas sist. COMPATIBLE DETERMINADO. Es un sistema tipo Cramer.

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-9}{5}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{5} = \frac{4}{5}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-2}{5}$$

- CUESTIÓN 2.A.

  Calcule la ecuación del plano determinado por los puntos $P = (1, 0, 1), Q = (2, 2, 2)$ y $R = (1, -1, 0)$ y la distancia entre dicho plano y la recta determinada por el punto $S = (1, 0, 0)$ y el vector $v = (1, 1, 0)$.

  selcn Junio 2009 Solución:

  Para hallar la ecuación del plano π determinado por esos tres puntos consideramos el punto $P(1, 0, 1)$ y los vectores dirección $\vec{PQ} = (2-1, 2, 2-1) = (1, 2, 1)$ y $\vec{PR} = (1-1, -1, -1) = (0, -1, -1)$

  $$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -x + y - z + 2 = 0$$

Es fácil ver que la recta $r:\left\{\begin{array}{c} S(1,0,0) \\ \vec{v}=(1,1,0)\end{array}\right.$ es paralela al plano puesto que $\vec{v}$ es ortogonal al vector ortogonal al plano, otra forma es ver es igual a la suma de los vectores $\vec{PQ},\vec{PR}$.

Por tanto para hallar la distancia entre ellos basta tomar la distancia de un punto de la recta al plano:
$d(r,\pi)=d(S,\pi)=\dfrac{-1+2}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

- CUESTIÓN 2.B.

  Calcule el punto del plano $x+y+z=1$ más cercano al punto $(1,2,-3)$. Calcule la distancia entre ambos puntos.

  selcn Junio 2009 Solución:

  El punto más cercano al $P(1,2,-3)$ del plano $\pi : x+y+z-1$ es el pie de la recta r perpendicular al plano por P.

  Como vector dirección de la recta nos sirve el vector ortogonal del plano:

  $r:\left\{\begin{array}{c} P(1,2,-3) \\ \vec{v}=(1,1,1)\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x=1+t \\ y=2+t \\ z=-3+t\end{array}\right.$

  Para hallar el punto de intersección sustituimos las paramétricas de r en la general de π :

  $1+t+2+t-3+t-1=0;\quad 3t=1;\quad t=\frac{1}{3};\left\{\begin{array}{c} x=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3} \\ y=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3} \\ z=-3+\frac{1}{3}=-\frac{8}{3}\end{array}\right.$

  El punto del plano más próximo a P es el $(\dfrac{4}{3},\dfrac{7}{3},-\dfrac{8}{3})$

  La distancia entre los dos puntos es

  $d=\sqrt{(1-\dfrac{4}{3})^2+(2-\dfrac{7}{3})^2+(-3+\dfrac{8}{3})^2}=\dfrac{1}{3}\sqrt{1+1+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=0'577350$

- CUESTIÓN 3.A.

  Dada la función $f(x)=x^3-4x^2+4x$, se pide:

  i) Dominio y cortes con el eje x.

  ii) Estudio de regiones para el signo de f(x).

  iii) Límites en $+\infty$ y $-\infty$ y estudiar si existen asíntotas horizontales y oblicuas.

  iv) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.

  v) Representación gráfica aproximada.

  selcn Junio 2009 Solución:

  Como es una función polinómica para representar basta con los punto de corte y el crecimiento:

  - Puntos de corte:

    Con OX, se hace $y=0$ queda $x^3-4x^2+4x=x(x-2)^2=0\left.\right\}\begin{array}{c} x=0 \\ x=2 \text{ doble}\end{array}$

- Crecimiento y extremos

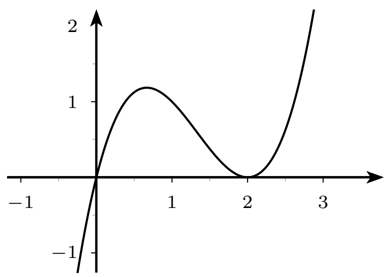
  Veamos el signo de la derivada:

  $$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = 0 \left.\right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{2}{3} \end{array}$$

x		$\frac{2}{3}$		2	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

  Hay pues un máximo para $x = \dfrac{2}{3}$, $\quad y = f(\dfrac{2}{3}) = \dfrac{2}{3}(\dfrac{2}{3} - 2)^2 = \dfrac{2}{3}\dfrac{16}{9} = \dfrac{32}{27}$

  Hay un mínimo en $(2, 0)$



Los restantes puntos que pide estudiar son triviales aplicaciones de la teoría:

Dominio es todo R por ser un polinomio x puede tomar cualquier valor

Regiones: Solo se produce cambio de signo en $x = 0$

x		0	
y	$-$		$+$

Los límites son triviales en un polinomio $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Por ello no hay asíntotas horizontales ni oblicuas.

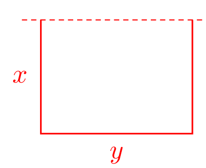
No hay asíntotas verticales pues no hay valor de x que lleve a ∞ a la función.

- CUESTIÓN 3.B.

La longitud de la barra de un bar de forma rectangular y apoyada en una pared vale $L = 2x + y$. Calcular las dimensiones de x e y para que la longitud de la barra sea mínima sabiendo que el área encerrada por la barra debe ser de 18 metros cuadrados.

selcn Junio 2009 Solución:

Longitud: $L = 2x + y$ mínima
Área: $x \cdot y = 18$. Despejamos y:
$y = \dfrac{18}{x}$
Sustituyendo en L: $L(x) = 2x + \dfrac{18}{x}$ mínima



Ahora anulamos la derivada:

$$L'(x) = 2 - \frac{18}{x^2} = \frac{2x^2 - 18}{x^2} = 0; \quad x = \pm 3$$

Por las condiciones del enunciado la solución es 3, hagamos no obstante el estudio del crecimiento en ese punto:

x		3	
$S'(x)$	$-$		$+$
$S(x)$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

- CUESTIÓN 4.A.

  i) Enunciar el teorema fundamental del cálculo.

  ii) Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+3x+2}dx$

  selcn Junio 2009 Solución:

  Es una integral de función racional con el numerador de mayor grado que el denominador, empezamos haciendo la división:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+3x+2 \\ \cline{2-2} -x^3-3x^2-2x & x-3 \\ \hline -3x^2-2x & \\ 3x^2+9x+6 & \\ \hline 7x+6 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3+2}{x^2+3x+2}dx = \int \left(x-3+\frac{7x+6}{x^2+3x+2}\right)dx$$

  Veamos las raíces del denominador:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3\pm 1}{2} = \begin{array}{c} -2 \\ -1 \end{array}$$

  El denominador tiene raíces reales simples, planteamos la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{7x+6}{x^2+3x+2} = \frac{7x+6}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x+2)}{(x+2)(x+1)}$$

  Identificando numeradores : $7x+6 = A(x+1)+B(x+2)$ $\begin{array}{l} \text{Para } x=-1 \text{ resulta } -1=B \\ \text{Para } x=-2 \text{ resulta } -8=-A; A=8 \end{array}$

$$\int \frac{x^3+2}{x^2+3x+2}dx = \int \left(x-3+\frac{7x+6}{x^2+3x+2}\right)dx = \int \left(x-3+\frac{8}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$\frac{x^2}{2}-3x+8\ln|x+2|-\ln|x+1|+C$$

- CUESTIÓN 4.B.

  Calcular el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x\ln(x)$ para $1 \leq x \leq 2$, la recta $x = 2$ y el eje OX.

  selcn Junio 2009 Solución:

  La función es siempre positiva en la zona de integración luego el área viene dad directamente por la integral definida:

  Calculemos primero la primitiva:

$$\int x\ln x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=xdx & v=\frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}+C$$

  Entonces:

$$S = \int_1^2 x\ln x dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{4}{2}\ln 2 - \frac{4}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{4}\right] = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - \frac{3}{4} = 0'636294u^2$$

Selectividad Matemáticas II (Murcia) 13

Año 2008

13.1. Septiembre 2008

- CUESTIÓN 1.A.

  Calcular el rango de la matriz A según los valores del parámetro a.

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & 6 & a \end{pmatrix}$$

  selcn Sept 2008 Solución:

  Hacemos un determinante del mayor orden posible, empezamos con el formado por las tres primeras columnas:

  $$\begin{vmatrix} 1 & -1| & -2 \\ 2 & 0| & -4 \\ \hline -3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

  Orlamos el menor de orden 2 no nulo con la cuarta columna: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & a \end{vmatrix} == 4a - 4$ Por tanto:

  Si $a \neq 1, r(A) = 3$; Si $a = 1, r(A) = 2$.

- CUESTIÓN 1.B.

  i) Enunciar el teorema de Rouché-Fröbenius.

  ii) Resolver, si es posible, el sistema de ecuaciones lineales siguiente. $\left.\begin{array}{r} -2x + y - z = 1 \\ -x + 3y + 2z = 2 \\ x - y - 2z = 3 \end{array}\right\}$

  selcn Sept 2008 Solución: Aplicaremos el método de Gauss buscando triangular la matriz asociada al sistema:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 2^a \times (-2) + 1^a \\ 3^a \times 2 + 1^a \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 3^a \times (-5) + 2^a \\ 3^a \times 2 + 1^a \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 20 & -38 \end{pmatrix}$$

  Sustituyendo en el sistema y despejando hacia arriba:

$$\left.\begin{array}{r} -2x+y-z=1 \\ -5y-5z=-3 \\ 20z=-38 \end{array}\right\}; \quad z=\frac{-19}{10}; \quad -5y-5.\frac{-19}{10}=-3; y=\frac{5}{2}; \quad -2x+\frac{5}{2}-\frac{-19}{10}=1; x=\frac{17}{10}$$

- CUESTIÓN 2.A.

  Dada la recta r determinada por el punto $P=(1,2,-3)$ y el vector de dirección $\vec{v}=(1,-1,2)$, calcule el punto de r más cercano al punto $Q=(1,0,2)$.

  selcn Sept 2008 Solución:

  El punto busacdo es la intersección de la recta r con el plano π perpendicular a r por el punto Q

  El vector dirección de r nos sirve de vector ortogonal a π; $\pi: x-y+2z+D=0$ haciendo que pase por $Q=(1,0,2):\quad 1-4+D=0;\quad D=-5;\quad \pi: x-2y+2z-5=0$

  Intersección del plano π y la recta r: sustituimos las paramétricas de r: $\left\{\begin{array}{l} x=1+t \\ y=2t \\ z=-3+2t \end{array}\right.$ en la ecuación de π:

  $1+t-2+t-6+4t-5=0;\quad 6t-12=0;\quad t=2$ sustituyendo en r: $\left\{\begin{array}{l} x=1+3=3 \\ y=2-2=0 \\ z=-3+4=1+t \end{array}\right.$ queda el punto $P(3,0,1)$

- CUESTIÓN 2.B.

  Dadas las rectas $r_1: x=y=z$ y r_2 determinada por los puntos $P=(1,2,3)$ y $Q=(1,-1,0)$, calcule la ecuación de recta que une ambas rectas por el camino más corto.

  selcn Sept 2008 Solución: Nos están pidiendo la perpendicular común a las dos rectas.

  $r_1: x=y=z \quad \left\{\begin{array}{l} P_1(0,0,0) \\ \vec{v_1}=(1,1,1) \end{array}\right. \qquad r_2: \left\{\begin{array}{l} P(1,2,3) \\ \vec{QP}=(0,3,3); \vec{v_2}=(0,1,1) \end{array}\right.$

  Hallamos el plano π que contiene a r_1 y es paralelo a r_2

  $$\pi: \left|\begin{array}{ccc} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right| = 0; -y+z=0$$

  Plano π_1 que contiene a r_1 y es perpendicular a π: $\pi_2: \left|\begin{array}{ccc} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right| = 0;\quad 2x-y-z=0$

  Plano π_2 que contiene a r_2 y es perpendicular a π: $\pi_2: \left|\begin{array}{ccc} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right| = 0; 2x-2=0;\quad x-1=0$

  La perpendicular común viene dada por la intersección de π_1 y π_2 $\left\{\begin{array}{l} 2x-y-z=0 \\ x-1=0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1-t \\ z=1+t \end{array}\right.$

- CUESTIÓN 3.A.

  Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{4-x}$

  se pide:

i) Dominio y cortes con el eje x.

ii) Asíntotas verticales (calculando los límites laterales).

iii) Asíntotas horizontales y oblicuas.

iv) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.

v) Representación gráfica aproximada.

selcn Sept 2008 Solución:

Primero representaremos y después responderemos a los apartados que falten:

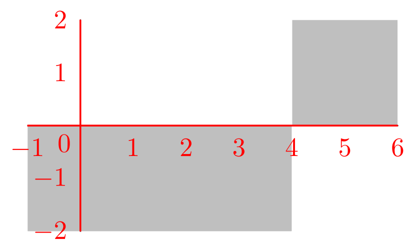
1) Dominio y regionamiento Estudiamos el signo de la función.

$f(x) = \dfrac{x^2}{4-x}$

Hallando las raíces de numerador y denominador resulta que delimitan región de cambio de signo de y : $x = 4$

x		4	
y	$+$		$-$

El dominio es $R - \{-4\}$



2) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con OY : $x = 0$, resulta $y = 0$ El origen es el único punto de corte

3) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales $x = 4$

horizontales: no hay

Asíntota oblicua $y = mx + n$

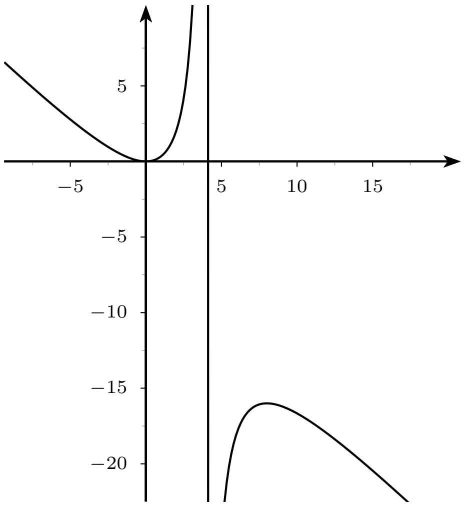
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{fx)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4x - x^2} = -1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-4} + x = \frac{4x}{4-x} = -4 \text{ Asintota oblicua:; } y = -x - 4$$

4) Extremos y crecimiento Estudiamos el signo de la derivada

$f'(x) = \dfrac{-x^2 + 8x}{(4-x)^2}$

x		0		8	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$



Veamos ahora los límites laterales en las asíntotas verticales que pide expresamente el problema: En $x = 4$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \frac{x^2}{4-x} ='' \frac{16}{0^+}'' = \infty$$

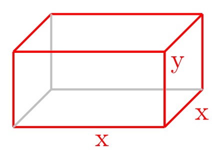
$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{x^2}{4-x} ='' \frac{16}{0^-}'' = -\infty$$

- CUESTIÓN 3.B.

  Se quiere construir una caja (sin tapadera) de base cuadrada y con un volumen de 250 cm^3. Calcule las dimensiones de la base y la altura de la caja para que su superficie sea mínima.

  selcn Sept 2008 Solución:

  Volumen $V = x^2 \cdot y = 250$
  Superficie $S = x^2 + 4 \cdot x \cdot y$ mínimo
  Despejamos y en el volumen: $y = \dfrac{250}{x^2}$,
  sustituyendo en la superficie:
  $S(x) = x^2 + 4x\dfrac{250}{x^2} = x^2 + \dfrac{1000}{x}$
  derivando e igualando a cero:



$$S'(x) = 2x - \frac{1000}{x^2} = 0$$

$$\frac{2x^3 - 1000}{x^2} = 0; \quad 2x^3 - 1000 = 0; \quad x = \sqrt[3]{500} \approx 7'937$$

x		$\sqrt[3]{500}$	
$S'(x)$	$-$		$+$
$S(x)$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

$$y = \frac{250}{(\sqrt[3]{500})^2} \approx 3'968$$

- CUESTIÓN 4.A.

  Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2+1}$

  selcn Sept 2008 Solución:

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 1 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x & x \\ \hline -x + 1 & \end{array}$$

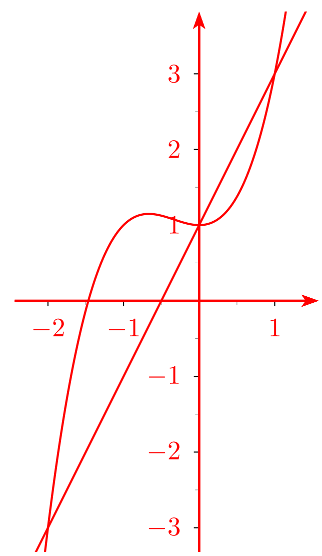
$\int \frac{x^3+1}{x^2+1}dx = \int (x + \frac{-x+1}{x^2+1})dx = \int (x + \frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1})dx = \frac{x^2}{2} + ar\tan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2} + ar\tan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

- CUESTIÓN 4.B.

  Calcular el área encerrada por las funciones $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ y $g(x) = 2x + 1$.

  selcn Sept 2008 Solución:

  $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ y $g(x) = 2x + 1$.
  Representamos la cúbica:
  Puntos de corte
  Con OX : $y = 0$, no fácil
  Con OY : $x = 0$: $y = 1$
  Crecimiento de $f(x)$
  $f'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x+2)$, se anula para $x = -\frac{2}{3}$, $x = 0$



x		$-\frac{2}{3}$		0	
y'	$+$		$-$		$+$
y	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

  Corte entre la recta y la cúbica:
  $x^3 + x^2 + 1 = 2x + 1$; $x^3 + x^2 - 2x = 0$
  $x(x^2 - x - 2)$; $x = 0, x = 1, x = -2$
  Area $\int_{-2}^{0}$ cúbica - recta + $\int_{0}^{1}$ recta - cúbica

  $= \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)dx + \int_{0}^{1} (-x^3 - x^2 + 2x)dx =$

  $= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_{0}^{1} = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}$

13.2. Junio 2008

- CUESTIÓN 1.A.

  Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

  selcn Junio 2008 Solución:

  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ por tanto existe inversa $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}[adj(A^t)]$

  $$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}; adj(A^t) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -21 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

  $$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

- CUESTIÓN 1.B.

  Clasificar el sistema siguiente según los valores de los parámetros a y b. $\left.\begin{array}{r} x - y - z = b \\ -x + y = 2 \\ x + ay + 2z = -2 \end{array}\right\}$

  selcn Junio 2008 Solución:

  La matriz ampliada es

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & b \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

  Hacemos el determinante de la matriz de coeficientes:

  $|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 2 + a + 1 - 2 = a + 1$ Se anula para $a = -1$

  Para $a \neq -1; \forall b$ ran(M) =3 = ran$(A) = n^0$ incógnitas sist. COMPATIBLE DETERMINADO

  Para $a = -1$ queda:

  $A = \begin{pmatrix} 1| & -1 & -1| & b \\ -1| & & 0| & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ que incluye un menor no nulo de orden 2 dentro de la matriz de coeficientes.

  Consideramos el determinante formado por la tres últimas columnas:

  $\begin{vmatrix} -1 & -1 & b \\ 1 & 0 & 2 \\ a & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2b + 4$ Que se anula para $b = -2$. Por tanto siendo $a = -1$:

Para $b \neq -2$: ran(M)= $2 < 3 =$ ran(A) sist. INCOMPATIBLE

Para $b = -2$: ran(M)= $2 =$ ran(A) $< 3 = n^0$ incógnitas sist. COMPATIBLE INDETERMINADO

- CUESTIÓN 2.A.

  Calcule la distancia entre la recta $r_1 : x + 1 = y = z - 3$ y la recta r_2 determinada por el punto $P_2 = (1, -1, 3)$ y el vector de dirección $\vec{v_2} = (1, 0, 3)$.

  selcn Junio 2008 Solución:

  Consideremos un punto y un vector dirección de cada recta:

  $$r_1 : x + 1 = y = z - 3 \quad \begin{cases} P_1(-1, 0, 3) \\ \vec{v_1} = (1, 1, 1) \end{cases} \qquad r_2 : \quad \begin{cases} P_2(1, -1, 3) \\ \vec{v_2} = (1, 0, 3) \end{cases}$$

  Como $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ no son proporcionales las rectas no son paralelas, por tanto se cortan o se cruzan. La mínima distancia entre ellas viene dada por la distancia de P_2 al plano π que contiene a r_1 y es paralelo a r_2:

  $$\pi : \begin{vmatrix} x+1 & y & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3x - 2y - z + 6 = 0$$

  $$d(r_1, r_2) = d(P2, \pi) = \frac{3 + 2 - 3 + 6}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{14}}$$

- CUESTIÓN 2.B.

  Calcule el punto del plano $2x + y - z = 1$ más cercano al punto $(1, 2, -3)$.

  selcn Junio 2008 Solución:

  Recta perpendicular al plano $\pi : 2x + y - z = 1$ que pasa por el punto $P(1, 2, -3)$

  $$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

  Hallamos la intersección de la recta r y el plano π, para ello sustiutimos las paramétricas de r en la ecuación de π:

  $2(1+t)+2+t-(-3-t) = 1; \quad 6t = -6 \quad t = -1$ sustituyendo en r: $\begin{cases} x = 1 + 2(-1) \\ y = 2 + (-1) \\ z = -3 - (-1) \end{cases}$ obtenemos el punto $A(-1, 1, -2)$ que es el más cercano de π a P.

- CUESTIÓN 3.A.

  Dada la función $f(x) = 1 - \dfrac{3x}{x^2 - 4}$

  se pide: i) Dominio y cortes con el eje x.

  ii) Asíntotas verticales (calculando los límites laterales).

  iii) Asíntotas horizontales y oblicuas.

  iv) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.

  v) Representación gráfica aproximada.

  selcn Junio 2008 Solución: Primero representaremos y después responderemos a los apartados que falten:

1) Dominio y regionamiento Estudiamos el signo de la función.

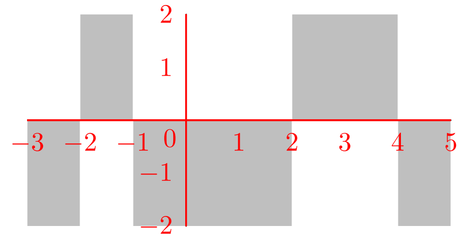
Para ello escribimos la función en la forma:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 4}$$

Hallando las raíces de numerador y denominador resulta que delimitan región de cambio de signo de $y: \quad x = -1, x = 4, x = -2, x = 2$

x		-2		-1		2		4	
y	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$

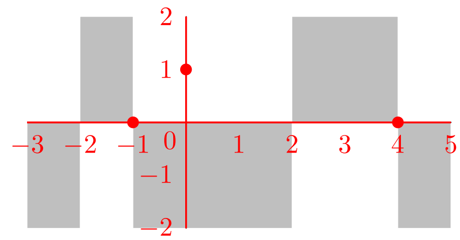
El dominio es $R - \{-2, 2\}$



2) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY: x = 0$, resulta $y = 1$

con $OX: y = 0$, resulta $x = -1, x = 4$



3) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

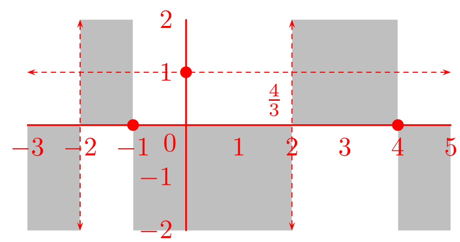
verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales $x = -2, \quad x = 2$

horizontales $n = \lim_{x\to\infty} (fx) = \lim_{x\to\infty} (1 - \frac{3x}{x^2 - 4}) = 1$

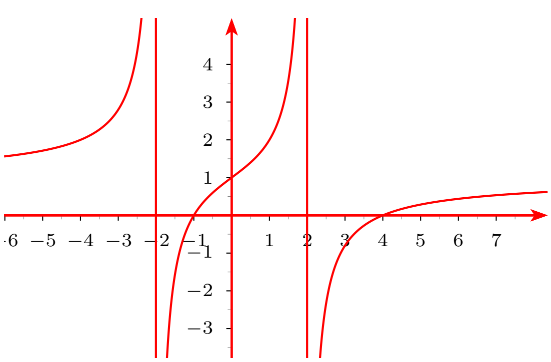
Asíntota horizontal $y = 1$

Como hay horizontal no hay asíntota oblicua



4) Extremos y crecimiento Estudiamos el signo de la derivada

$f'(x) = \frac{-3(x^2 - 4) - 2x(-3x)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{3x^2 + 12}{(x^2 - 4)^2}$ siempre positiva luego la función es siempre creciente.



Veamos ahora los límites laterales en las asíntotas verticales que pide expresamente el problema:

- $x = -2$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} (1 - \frac{3x}{x^2-4}) = \left\{1 - \frac{6}{0^-}\right\} = \infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (1 - \frac{3x}{x^2-4}) = \left\{1 - \frac{6}{0^+}\right\} = -\infty$$

- $x = 2$

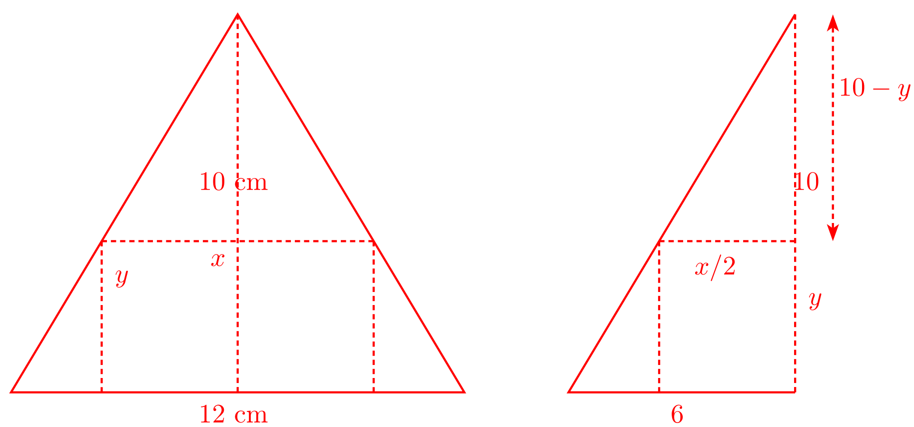
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (1 - \frac{3x}{x^2-4}) = \left\{1 - \frac{6}{0^-}\right\} = \infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (1 - \frac{3x}{x^2-4}) = \left\{1 - \frac{6}{0^+}\right\} = -\infty$$

- CUESTIÓN 3.B.

En un triángulo isósceles de base 12 cm (correspondiente al lado desigual) y altura 10 cm, se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus lados está sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales del triángulo. Calcular las dimensiones (base y altura) del rectángulo para que su área sea máxima.

selcn Junio 2008 Solución:



Área rectángulo: $S = x.y$ máxima

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{6}{\frac{x}{2}} = \frac{10}{10-y}; \quad 6(10-y) = \frac{10x}{2}; \quad 60 - 6y = 5x; \quad 6y = 60 - 5x; \quad y = 10 - \frac{5}{6}x$$

Sustituyendo en el área:

$$S(x) = x.(10 - \frac{5}{6}x) = 10x - \frac{5}{6}x^2$$

Derivando y anulando la derivada: $S'(x) = 10 - \frac{10}{6}x = 0; \quad 10 = \frac{5}{3}x; \quad x = 6$

x		6	
$S'(x)$	$+$		$-$
$S(x)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

Si $x = 6$ cm entonces $y = 10 - \frac{5}{6}6 = 5$ cm

- CUESTIÓN 4.A.

i) Enunciar el teorema fundamental del cálculo.

ii) Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1}dx$

selcn Junio 2008 Solución:

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2 & x^2-2x+1 \\ \hline -x^3+2x^2 \quad -x & x \\ \hline \qquad\qquad -x & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1}dx=\int (x-\frac{x}{x^2-2x+1})dx=\frac{x^2}{2}-\int \frac{x}{x^2-2x+1}dx$$

Planteamos la descomposición en fracciones simples

$$\frac{x}{x^2-2x+1}=\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$$

Identificando numeradores: $x=Ax-A+B$, para $x=1$ resulta $1=B$, para $x=0$ queda $0=-A+B$ luego $A=1$, sustituyendo:

$$\int \frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1}dx=\frac{x^2}{2}-\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx=\left\{\int \frac{1}{(x-1)^2}dx=\int (x-1)^{-2}dx=\frac{(x-1)^{-1}}{-1}=\frac{-1}{x-1}\right\}$$

$$=\frac{x^2}{2}-\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+C$$

- CUESTIÓN 4.B.

  Calcular el área encerrada por las funciones $f(x)=1+\ln(x)$ y $g(x)=1/x$ y las rectas $x=1$ y $x=2$.

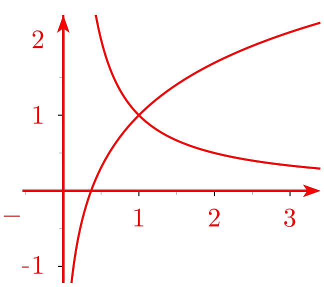
selcn Junio 2008 Solución:

El área viene dada por : $S=\displaystyle\int_1^2(1+\ln x-\frac{1}{x})dx$

$$\int \ln x dx=\left\{\begin{array}{ll} u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx \\ v=x & dv=dx \end{array}\right\}=x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx=x\ln x-x$$

Por tanto:

$S=\displaystyle\int_1^2(1+\ln x-\frac{1}{x})dx=[x+x\ln x-x-\ln x]_1^2=[x\ln x-\ln x]_1^2=2\ln 2-\ln 2-(\ln 1-\ln 1)=\ln 2=0'68u^2$



Selectividad Matemáticas II (Murcia) 14

Año 2007

14.1. Septiembre 2007

- CUESTIÓN 1.A.

  i) Enunciar el teorema de Rouché-Fröbenius.

  ii) Estudiar y resolver, cuando sea posible, el sistema siguiente.

  $$\left\{\begin{array}{l} ax+by=0 \\ x+y=a \end{array}\right.$$

  i) Dado un sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas $\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=c_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=c_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=c_m \end{array}\right.$

  Sea M la matriz de coeficientes y sea A la matriz ampliada.

  La condición necesaria y suficiente para que tenga solución (sea compatible) es que: rango(M) = rango(A)

  Entonces:

  ran(M) < ran(A) sist. INCOMPATIBLE
  ran(M) = ran$(A) = n^0$ incógnitas sist. COMPATIBLE DETERMINADO
  ran(M) = ran$(A) < n^0$ incógnitas sist. COMPATIBLE INDETERMINADO

  ii) $M=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $\quad \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=a-b$

  Si $a\neq b, r(M)=2=r(A)=n^0$ incógnitas sist. COMPATIBLE DETERMINADO

  Si $a=b$, queda $A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $\quad \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix}=a^2$. Entonces:

  Si $\left\{\begin{array}{l} a\neq 0, r(M)=1<2=r(A) \text{sist. INCOMPATIBLE} \\ a=0, r(M)=1=r(A)<2=n^0 \text{ incógnitas sist. COMP. INDET. soluciones dependientes de un parámetro} \end{array}\right.$

  Resolución en los casos de compatibilidad:

  Si $a\neq b$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ a & 1 \end{vmatrix}}{a-b} = \frac{-ab}{a-b}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix}}{a-b} = \frac{a^2}{a-b}$$

Si $a = b = 0$

El sistema se reduce a la ecuación: $x+y=0$ dejando la y como parámetro la solución quedaría $x = -y; \quad y \in R$

- CUESTIÓN 1.B.

  Calcule, si es posible, la inversa de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

selcn Sept 2007 Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ por tanto existe inversa } A^{-1} = \frac{1}{|A|}[adj(A^t)]$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; adj(A^t) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- CUESTIÓN 2.A.

  Estudie si las rectas siguientes se cruzan, se cortan, son paralelas o son coincidentes y calcule la distancia entre ellas.

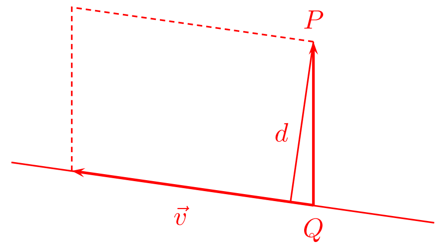
$$r_1: \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = 1 - \frac{z}{2} \qquad r_2: \quad \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 3\lambda/2 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

selcn Sept 2007

$$r_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-2} \quad \begin{cases} P_1(1,-2,2) \\ \vec{v_1} = (2,3,-2) \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + \frac{3}{2}t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \begin{cases} P_2(0,1,2) \\ \vec{v_2}: (1, \frac{3}{2}, -1); \quad \vec{v_2} = (2,3,-2) \end{cases}$$

La dirección es la misma, luego las rectas son paralelas o coincidentes.

El vector $\vec{P_2P_1} = (1-0, -2-1, 2-2) = (1,-3,0))$ no es proporcional a los vectores dirección luego las rectas son paralelas.



La fórmula de a distancia de un punto a una recta es: $d(P,r)=\dfrac{|\vec{PQ}\wedge\vec{v}|}{|\vec{v}|}=$

$\vec{P_2P_1}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -3 & 0\\ 2 & 3 & -2\end{vmatrix}=6\vec{i}+2\vec{j}+9\vec{k}$

$d(P_1,r_2)=\dfrac{\sqrt{6^2+2^2+9^2}}{\sqrt{2^2+3^2+2^2}}=\dfrac{\sqrt{121}}{\sqrt{17}}=\dfrac{11}{\sqrt{17}}$

Una forma constructiva de hallar la distancia más larga y que no compensa sería:

Plano π perpendicular a las dos rectas, por ejemplo el que pasa por el origen, $\vec{v_1}=(2,3,-2)$ sirve de vector ortogonal luego $\pi: 2x+3y-2z=0$

Intersección de r_1 y π sustituimos las paramétricas de r_1 $\begin{cases}x=1+2t\\ y=-2+3t\\ z=2-2t\end{cases}$ en la ecuación del plano: $2(1+2t)+3(-2+3t)-2(2-2t)=0,\qquad t=\dfrac{8}{17}$ sustituyendo en las paramétricas de r_1 resulta:

$\begin{cases}x=1+\frac{16}{17}=\frac{33}{17}\\ y=-2+\frac{24}{17}=\frac{-10}{17}\\ z=2-\frac{16}{17}=\frac{18}{17}\end{cases};\qquad A\left(\dfrac{33}{17},\dfrac{-10}{17},\dfrac{18}{17}\right)$

Intersección de r_2 y π; r_2 $\begin{cases}x=2s\\ y=1+3s\\ z=2-2s\end{cases}$ sustituimos: $2(2s)+3(1+3s)-2(2-2s)=0,\qquad s=\dfrac{1}{17}$ sustituyendo en las paramétricas de

r_2 resulta: $\begin{cases}x=\frac{2}{17}=\frac{2}{17}\\ y=1+\frac{3}{17}=\frac{20}{17}\\ z=2-\frac{2}{17}=\frac{32}{17}\end{cases};\qquad B\left(\dfrac{2}{17},\dfrac{20}{17},\dfrac{32}{17}\right)$

Entonces $d(r_1,r_2)=d(A,B)=\sqrt{\dfrac{31^2+30^2+14^2}{17^2}}=\dfrac{11\sqrt{17}}{17}$

- CUESTIÓN 2.B.

Estudie si existe algún punto que pertenezca a la vez a los tres planos siguientes. Calcule los puntos en común (si existen).

$$\pi_1:\quad x-y+z=0;\qquad \pi_2:\quad z=2y;\qquad \pi_3:\quad\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=1+\lambda+\mu\\ z=1+2\lambda-\mu\end{cases}$$

selcn Sept 2007 Solución:

Estudiamos el sistema formado por las ecuaciones generales de los tres planos:

$\pi_1: x-y+z=0;\quad \pi_2: z=2y;\quad \pi_3:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=1+\lambda+\mu\\ z=1+2\lambda-\mu\end{cases}$

$\pi_3:\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=-(x-1)+z-1-2(x-1)=-3x+y+z+1=0$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ 3x - y - z = 1 \end{cases}$$

Hacemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

Por tanto es un sistema Cramer de solución única, los tres planos se cortan en un punto:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{1}{6}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{|M|} = -\frac{1}{6}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|M|} = -\frac{1}{3}$$

Luego los planos se cortan en el punto: $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$

- CUESTIÓN 3.A.

Dada la función $f(x) = x^3/(1 - x^2)$, se pide:

i) Dominio y cortes con el eje x.

ii) Puntos de discontinuidad, tipos de discontinuidad y asíntotas verticales (calculando los límites laterales).

iii) Asíntotas horizontales y oblicuas.

iv) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.

v) Representación gráfica aproximada teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores.

selcn Sept 2007 Solución:

Vamos a limitarnos a representar por camino corto, el resto de apartados se puede ver en Junio 2008 CUESTIÓN 3.A.

1) Dominio y regionamiento

Hallando las raíces de numerador y denominador resulta que delimitan región de cambio de signo de $y: \quad x = 0, x = \pm 1$

x		-1		0		1	
y	$+$		$-$		$+$		$-$

2) Puntos de corte con los ejes

con $OX: y = 0$, resulta $x = 0$

con $OY: x = 0$, resulta el mismo

3) Asíntotas

verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales $x = \pm 1$

horizontales $n = \lim_{x \to \infty} (fx) = \infty$ no hay oblicuas $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(1-x^2)} = -1$$

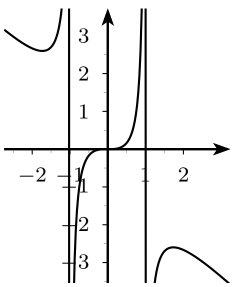
$$m = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{1-x^2} + x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{1-x^2} = 0$$

Asíntota oblicua: $y = -x$

4) Extremos y crecimiento

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - 2x(x^3)}{(1-x^2)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1-x^2)^2}; \qquad 3x^2 - x^4 = 0; \qquad x = \pm\sqrt{3}$$

x		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		MIN		MAX	



- CUESTIÓN 3.B.

Una cartulina tiene forma rectangular con 30 cm de base y 20 cm de altura. Se quiere construir un cajón (sin tapadera) con la forma resultante tras recortar cuatro cuadrados de lado x en cada esquina de la cartulina. Calcule x para que el volumen del cajón resultante sea máximo. Calcule dicho volumen.

selcn Sept 2007 Solución:

Volumen $V = (30 - 2x) \cdot (20 - 2x) \cdot x =$ máximo

$V = 600x - 100x^2 + 4x^3$ derivando e igualando a cero:

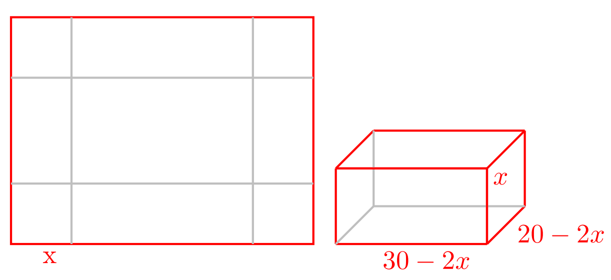
$V'(x) = 600 - 200x + 12x^2 = 0$

$3x^2 - 50x + 150 = 0$

$$x = \frac{50 \pm \sqrt{50^2 - 6 \cdot 150}}{4} = \begin{cases} x_1 = 3'92 \\ x_2 = 12'7 \end{cases}$$

la segunda no permitiría construir la caja.

x		$3'92$	
$S'(x)$	$+$		$-$
$S(x)$	$\nearrow$		$\searrow$
		MAX	



El volumen máximo será: $V = 1056'3 \text{ cm}^3$

- CUESTIÓN 4.A.

Calcular la integral: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3 + 2}{x^2 + 3x + 2} dx$

selcn Sept 2007 Solución:

Es una integral de función racional con el numerador de mayor grado que el denominador, empezamos haciendo la división:

$$\begin{array}{r|l} x^3+2 & x^2+3x+2 \\ \cline{2-2} -x^3-3x^2-2x & x-3 \\ \cline{1-1} -3x^2-2x+2 & \\ 3x^2+9x+6 & \\ \cline{1-1} 7x+8 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3+2}{x^2+3x+2}dx = \int \left(x-3+\frac{7x+8}{x^2+3x+2}\right)dx$$

Veamos las raíces del denominador:

$$x = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3\pm 1}{2} = \begin{array}{c} -2 \\ -1 \end{array}$$

El denominador tiene raíces reales simples, planteamos la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{7x+8}{x^2+3x+2} = \frac{7x+8}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x+2)}{(x+2)(x+1)}$$

Identificando numeradores : $7x+8 = A(x+1)+B(x+2)$ $\begin{array}{l} \text{Para } x=-1 \text{ resulta } 1=B \\ \text{Para } x=-2 \text{ resulta } -6=-A;\, A=6 \end{array}$

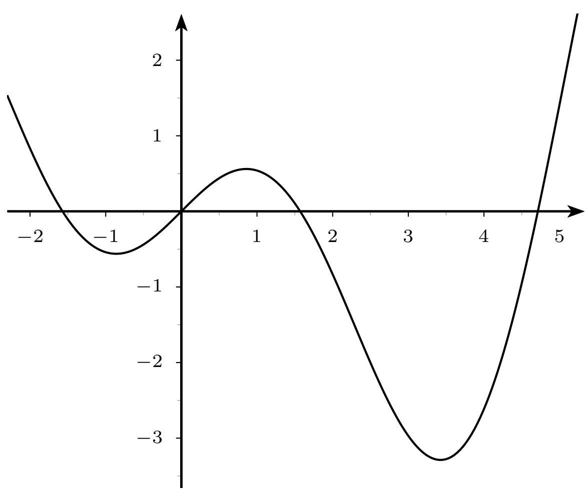
$$\int \frac{7x+8}{x^2+3x+2}dx = \int \left(\frac{6}{x+2}+\frac{1}{x+1}\right)dx = 6\ln|x+2|+\ln|x+1|$$

Por tanto:

$$\int_0^1 \frac{x^3+2}{x^2+3x+2}dx = \int_0^1 \left(x-3+\frac{7x+8}{x^2+3x+2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}-3x+6\ln|x+2|+\ln|x+1|\right]_0^1 = \frac{1}{2}-3+6\ln 3+$$
$$\ln 2-(6\ln 2+\ln 1) = -\frac{5}{2}+6\ln 3-5\ln 2 = 0'625$$

- CUESTIÓN 4.B. Calcular el área encerrada por el eje x y la función $f(x)=x\cos x$ entre $x=-\pi/2$ y $x=\pi/2$.

selcn Sept 2007 Solución: $S=\pi-2$



Como la función es impar: $S=S_1+S_2=2S_1$

$$S_1 = \int_0^{\pi/2} x\cos x dx = \text{calculamos la primitiva por partes:}$$

$$\int x\cos x dx = \left\{\begin{array}{ll} u=x & du=dx \\ dv=\cos x dx & v=\int\cos x dx=\operatorname{sen} x \end{array}\right\} = x\operatorname{sen} x-\int \operatorname{sen} x dx = x\operatorname{sen} x+\cos x$$

luego: $S_1 = \int_0^{\pi/2} x \cos x dx = [x \operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1$

Por tanto $S = 2(\frac{\pi}{2} - 1)u^2$

14.2. Junio 2007

- CUESTIÓN 1.A.

i) Definición de rango de una matriz.

ii) Calcular el rango de A según los valores del parámetro k.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

iii) Estudiar si podemos formar una base de R^3 con las columnas de A según los valores del parámetro k. Indique con qué columnas.

i) Rango de una matriz es el número máximo de filas (o de columnas) linealmente independientes. También es el orden del menor de orden más grande no nulo.

ii) Hacemos el determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ k & k & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6k - 18$, que se anula para $k = 3$

Luego para $k \neq 3, r(A) = 3$

Para $k = 3$ queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ eliminamos la segunda columna y hacemos el determinante:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ por tanto también el rango es 3. En consecuencia:

La matriz tiene rango 3 $\forall k \in R$

iii) Siempre se puede formar base de R^3:

Para $k \neq 3$ se pueden coger tres columnas cualesquiera.

Para $k = 3$, la segunda y la tercera son iguales, se escoge una de ellas y la primera y la cuarta.

- CUESTIÓN 1.B.

i) Clasificar el sistema siguiente según los valores del parámetro k.

ii) Resolver por Cramer para $k = 2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} kx + y - 2z = 0 \\ -x - y + kz = 1 \\ x + y + z = k \end{array} \right.$$

La matriz ampliada es

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Hacemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 + 1 \text{ Lo anulamos } -k^2 + 1 = 0, \quad k = \pm 1$$

Para $k \neq \pm 1$ ran(M) =3 = ran$(A) = n^0$ incógnitas sist. COMPATIBLE DETERMINADO

Para $k = 1$ queda:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la primera columna es igual a la segunda, hacemos el determinante de lo que queda:

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ luego: ran(M)= $2 < 3 =$ ran(A) sist. INCOMPATIBLE

Para $k = -1$ queda:

$A = \begin{pmatrix} -1| & 1 & -2| & 0 \\ -1| & -1 & -1| & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ la última fila es combinación lineal de la anterior y el menor de orden dos señalado es distinto de cero luego: ran(M) =2 = ran$(A) < 3 = n^0$ incógnitas sist. COMPATIBLE INDETERMINADO, soluciones dependientes de un parámetro.

iii) Para $k = 2$ resulta $|M| = -2^2 + 1 = -3$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{0}{-3} = 0; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1$$

- CUESTIÓN 2.A.

Un helicóptero situado en el punto $P = (1, 2, 1)$ quiere aterrizar en el plano $\pi : \quad x + y + 3z = 0$.

i) Calcule la ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que le lleve al punto más cercano del planoπ.

ii) Calcule dicho punto.

iii) Calcule la distancia que deberá recorrer.

selcn Jun 2007 Solución:

i) Es la recta perpendicular al plano por el punto, sirve por tanto de vector dirección de la recta el formado por los coeficientes de x, y, z que es vector ortogonal al plano.

$r : x - 1 = y - 2 = \dfrac{z - 1}{3}$

ii) El punto de intersección entre la recta y el plano lo hayamos sustituyendo las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases} ; \quad (1 + t) + (2 + t) + 3(1 + 3t) = 0; \quad t = -\frac{6}{11} \begin{cases} x = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11} \\ y = 2 - \frac{6}{11} = \frac{16}{11} \\ z = 1 - \frac{18}{11} = -\frac{7}{11} \end{cases} ; \quad P'(\frac{5}{11}, \frac{16}{11}, \frac{-7}{11})$$

iii) La distancia será:

$$d(P, \pi) = d(P, P') = \sqrt{(\frac{5}{11} - 1)^2 + (\frac{16}{11} - 2)^2 + (\frac{-7}{11} - 1)^2} = \frac{6}{\sqrt{11}}$$

- CUESTIÓN 2.B.

  Un asteroide, que sigue aproximadamente la trayectoria dada por la recta $r: \quad x+1 = y/2 = 2z+1$, se está acercando a un planeta situado en el punto $P = (1,1,2)$.

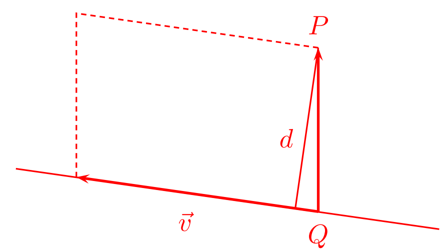
  i) Calcule la distancia más cercana a la que se encontrará del planeta.

  ii) Calcule el punto de la trayectoria del asteroide donde se alcanzará dicha distancia mínima.

  iii) Si inicialmente el asteroide se encuentra en el punto $Q = (-1,0,-1/2)$, calcule la distancia que deberá recorrer para alcanzar dicho punto.

  selcn Jun 2007 Solución:

  i) $r: \quad x+1 = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+\frac{1}{2}}{2} \quad \begin{cases} A(-1,0,-\frac{1}{2}) \\ \vec{v}: (1,2,\frac{1}{2}), \quad \vec{v} = (2,4,1) \end{cases}$

  La fórmula de a distancia de un punto a una recta es: $d(P,r) = \dfrac{|\vec{PQ} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|} =$

  $\vec{PA} = (-2,-1,-\dfrac{5}{2})$

  $\vec{v} \wedge \vec{PA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$

  $d(P,r) = \dfrac{\sqrt{9^2+3^2+6^2}}{\sqrt{2^2+4^2+1^2}} = \sqrt{6}$

  ii) Plano perpendicular: $2x+4y+z+D=0$; sustituyendo $P(1,1,2) \quad 2+4+2+D=0; \quad D=-8 \quad \pi: 2x+4y+z-8=0$

  Para hallar el punto de intersección ponemos r en paramétricas

  $r: \quad \begin{cases} x = -1+t \\ y = 2t \\ z = -\frac{1}{2}+\frac{t}{2} \end{cases} \qquad$ sustituyendo en $\pi: \quad -2+2t+8t-\dfrac{1+t}{2}-8=0; \quad t=1$ resulta el punto $P'(0,2,0)$ es el punto de la trayectoria de distancia mínima.

  iii) $\vec{P'Q} = (-1,-2,-\dfrac{1}{2}); \quad |\vec{P'Q}| = \sqrt{1^2+2^2+(\dfrac{1}{2})^2} = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$

- CUESTIÓN 3.A.

  Dada la función $f(x) = x^2(1-x)/(x^2-1)$, se pide:

  i) Dominio y cortes con el eje x.

  ii) Puntos de discontinuidad, tipos de discontinuidad y asíntotas verticales (calculando los límites laterales).

  iii) Asíntotas horizontales y oblicuas.

  iv) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.

  v) Representación gráfica aproximada teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores.

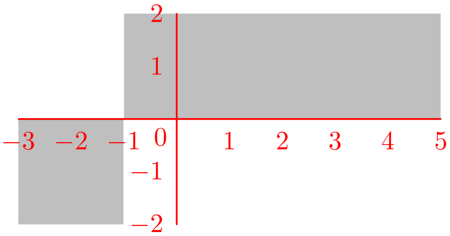
  selcn Jun 2007 Solución:

  Primero representaremos y después responderemos a los apartados que falten:

1) Dominio y regionamiento Hallando las raíces de numerador y denominador resulta que delimitan región de cambio de signo de

$y: \quad x = -1$

En cambio $x = 1$ no delimita región pues anula numerador y denominador, es más nos interesa escribir la función en la forma:



$$f(x) = \frac{x^2(1-x)}{x^2-1} = \frac{x^2(1-x)}{(x-1)(x+1)} =$$

$$\frac{-x^2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{(x+1)} & si \quad x \neq 1 \\ \text{no existe} & si \quad x = 1 \end{cases}$$

x		-1	
y	$+$		$-$

El dominio es $R - \{-1, 1\}$

Puntos de corte con los ejes:

con OX : $y = 0$, resulta $x = 0$ doble,$x = 1$ no es porque anula también al denominador

con OX : $y = 0$ es el mismo $x = 0$

Asíntotas:

verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales $x = -1$

Aclaremos la situación en $x = 1$ viendo los límites laterales

$$\lim_{x\to 1^-}(fx) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2(1-x)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2(1-x)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x^2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x^2}{(x+1)} = \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-}(fx) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2(1-x)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2(1-x)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-x^2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-x^2}{(x+1)} = \frac{-1}{2}$$

No existe $f(1)$ luego en $x = 1$ hay discontinuidad evitable

horizontal $y = n$: $n = \lim_{x\to\infty}(f(x) = \infty$ no hay

oblicua $y = mx + n$:

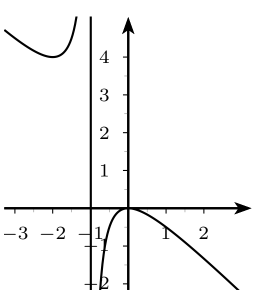
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{x(x+1)} = -1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{x+1} + x == \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2 + x^2 + x}{x+1} = 1$$

Extremos y crecimiento

$$f'(x) = \frac{(-2x)(x+1) - (-x^2)}{(x+1)^2} = \frac{-2x^2 - 2x + x^2}{(x+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2} \text{ anulando } v - x^2 - 2x = 0 \quad \begin{matrix} x = 0 \\ x = -2 \end{matrix}$$

x		-2		0	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		MIN		MAX	



De los apartados del anunciado falta por contestar a los límites laterales en $x = -1$, es inmediato con el regionamiento

$$\lim_{x \to -1^-} (fx) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2(1-x)}{x^2-1} = +\infty$$

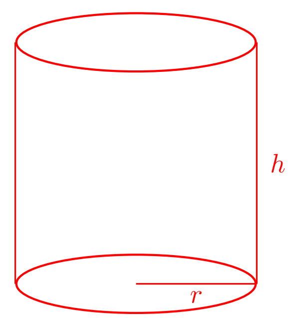
$$\lim_{x \to -1^+} (fx) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2(1-x)}{x^2-1} = -\infty$$

Hay discontinuidad de primera especie de salto infinito

- CUESTIÓN 3.B.

  De todos los cilindros de volumen $1/3$ calcular las dimensiones del que tiene menor superficie. (Indicación: la superficie está formada por dos círculos de radio r y un rectángulo de altura h y el volumen del cilindro es $V = \pi r^2 h$).

  selcn Jun 2007 Solución:

  Volumen cilindro = área de la base × altura

  $V = \pi.r^2.h =$

  Superficie: dos círculos de radio r y un rectángulo de altura h y base $2\pi.r$

  $S = 2\pi.r^2 + 2\pi.r.h$ min

  Llamamos al radio x y la altura y pues parece mejor despejar la altura en el volumen para sustituir en la superficie

  $\frac{1}{3} = \pi x^2 y; \qquad y = \frac{1}{3\pi x^2}$

  $S = 2\pi x^2 + 2\pi x y$

  $$S(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{1}{3\pi x^2} = 2\left(\pi x^2 + \frac{1}{3x}\right) = \frac{2}{3}\frac{3\pi x^3 + 1}{x}$$

  $$S'(x) = \frac{2}{3}\frac{9\pi x^2.x - (3\pi x^3 + 1)}{x^2} = \frac{2}{3}\frac{9\pi x^3 - 3\pi x^3 - 1)}{x^2} = \frac{2}{3}\frac{6\pi x^3 - 1)}{x^2}$$ anulamos la derivada:

  $6\pi x^3 - 1 = 0; \qquad x = \sqrt[3]{\frac{1}{6\pi}}$

x		$\sqrt[3]{\frac{1}{6\pi}}$	
y'	$-$		$+$
y	↘	MIN	↗

  $$y = \frac{1}{3\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1}{6\pi}}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{4}{3\pi}}$$

- CUESTIÓN 4.A.

  i) Enunciar el teorema fundamental del cálculo.

  ii) Calcular la derivada de la función $f(x) = \int_0^x \cos(t^2)dt$

  iii) Calcular la integral $\int_1^e \ln(x^2)dx$

  selcn Jun 2007 Solución:

  ii) Por el teorema fundamental del cálculo:

  La derivada de $f(x) = \int_0^x \cos(t^2)dt$ es $f'(x) = \cos x^2$

  iii) $\int \ln(x^2)dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x^2 & du = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right\} = x\ln x^2 - \int \frac{2x}{x}dx = x\ln x^2 - 2x$

$$\int_1^e \ln(x^2)dx = \left[x\ln x^2 - 2x\right]_1^e = 2e - 2e + 2 = 2$$

- CUESTIÓN 4.B.

  Calcular el área encerrada por la función $f(x) = (x^3 - 1)/(x^2 + 1)$ y los ejes x e y. [2.5 puntos]

  selcn Jun 2007 Solución:

  Primero estudiamos el signo(regionamiento) de la función descomponiendo en factores:

  $$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+1}$$

  luego el único cambio de signo se produce para $x = 1$

x		1	
y	$-$		$+$

  Por tanto el área vendrá dada por la integral definida entre 0 y 1 salvo el signo, bastará cambiar el signo para tener el área.

  Hallemos la primitiva. Es un racional con numerador de mayor grado, empezamos dividiendo:

  $$\begin{array}{l|l} x^3 - 1 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x & x \\ \hline \quad -x - 1 & \end{array}$$

  $$\int \frac{x^3-1}{x^2+1}dx = \int \left(x - \frac{x+1}{x^2+1}\right)dx$$

  El denominador tiene raíces no reales, buscamos primero el ln:

  $$\int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + ar\tan x$$

  Queda por tanto la integral definida:

  $$\int \frac{x^3-1}{x^2+1}dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - ar\tan x\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4} = -0'63$$

  Luego el área es $0'63u^2$

Selectividad Matemáticas II (Murcia) 15

Año 2006

15.1. Septiembre 2006

- CUESTIÓN 1.A.

  i) Definición de rango de una matriz. [0.5 puntos]

  ii) Calcule el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro k.

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  iii) ¿Podemos formar una base de R3 usando los vectores formados con las columnas de A? ¿Con cuáles?

  selcn Sep 2006 Solución:

  ii)Hacemos un determinante del mayor orden posible, empezamos con el formado por las tres columnas que no incluyen parámetro: $\begin{vmatrix} 1 & 1| & 2 \\ 2 & -1| & 1 \\ \hline -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

  Podemos eliminar la última columna que es combinación lineal de las otras.

  Orlamos el menor de orden 2 no nulo con la restante columna: $\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} == -k+3$ Por tanto:

  Si $k \neq 3, r(A) = 3$; Si $k = 3, r(A) = 2$.

  iii) Las tres primeras columnas forman base si $k \neq 3$.

- CUESTIÓN 1.B.

  i) Definición de matriz inversa de una matriz cuadrada. [0.5 puntos]

  ii) Calcule la inversa de la matriz B.

  $$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

selcn Sep 2006 Solución:

Hay problema igual resuelto con detalle en: CUESTIÓN 1.A. de junio de 2008; CUESTIÓN 1.B. de septiembre de 2007

$|A| = 1, A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

- CUESTIÓN 2.A.

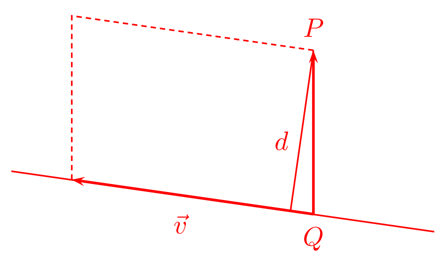
Calcule la distancia del punto $P = (1, -1, 3)$ a la recta r.

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

selcn Sep 2006 Solución:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad \begin{cases} Q(1, 1, 1) \\ \vec{v} = (1, -1, 2) \end{cases}$$

El vector $\vec{PQ} = (1 - 1, 1 + 1, 1 - 3) = (0, 2, -2))$



La fórmula de a distancia de un punto a una recta es:

$$d(P, r) = \frac{|\vec{PQ} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{PQ} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$d(P_1, r_2) = \frac{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}$$

La forma constructiva de hallar la distancia (dada por la distancia entre el punto dado y el punto de intersección del plano perpendicular con la recta), es más larga y no compensa.

- CUESTIÓN 2.B.

i) Demuestre que las rectas siguientes se cortan en un punto. ¿Cuál es ese punto?

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases}$$

ii) Calcule la ecuación general del plano determinado por ambas rectas.

selcn Sep 2006 Solución:

i) $r_1 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \begin{cases} P_1(2, 3, 1) \\ \vec{v_1} = (-1, 1, 2) \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 6 + s \\ z = 6 + s \end{cases} \quad \begin{cases} Q(0, 6, 6) \\ \vec{v_2} = (1, 1, 1) \end{cases}$

Vectores dirección no proporcionales luego no son paralelas.

$\vec{PQ} = (1 - 2, 6 - 3, 6 - 1) = (-1, 3, 5))$.

$[\vec{PQ}, v_1, v_2] = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ Por tanto las rectas se cortan.

Una manera rápida de obtener el punto de intersección de las dos rectas es: observamos por las dos últimas ecuaciones paramétricas de r_2 que esta recta está contenida en el plano $y = z$. Sustituyendo las paramétricas de r_1 en este plano hallamos el punto de intersección que será el punto buscado:

$3 + t = 1 + 2t; 2 = t$, sustituyendo en las paramétricas de r_1 : $\begin{cases} x = 2 - 2 = 0 \\ y = 3 + 2 = 5 \\ z = 1 + 4 = 5 \end{cases}$ luego el punto de intersección de las rectas es $(0, 5, 5)$

ii) Para hallar el plano que las contiene tomamos el punto y el vector dirección de r_1 y el vector dirección de r_2

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x + 3y - 2z - 5 = 0$$

- CUESTIÓN 3.A.

i) Definición de función continua en un punto. [0.5 puntos]

ii) Estudie la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$ y clasificar según los diferentes tipos de discontinuidad.

iii) Estudie si tiene asíntotas horizontales o verticales.

selcn Sep 2006 Solución:

Como es una función racional la continuidad puede fallar en puntos que anulen al denominador

$x^2 + 3x + 2 = 0$, se nula para $x = -1$ y $x = -2$. Vamos a estudiar los límites en estos puntos:

- $x = -1$

  $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \to -1} \dfrac{(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(x + 2)} = \lim_{x \to -1} \dfrac{x - 1}{x + 2} = -2$

  Por otro lado $f(-1)$ no está definida, por tanto en $x = -1$ hay discontinuidad evitable.

- $x = -2$

  $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \to -2^-} \dfrac{x - 1}{x + 2} = \left\{ \dfrac{-3}{0^-} \right\} = -\infty$

  $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \to -2^+} \dfrac{x - 1}{x + 2} = \left\{ \dfrac{-3}{0^+} \right\} = \infty$

  Luego en $x = -2$ hay una discontinuidad de salto infinito. En la gráfica hay una asíntota vertical.

iii) Ya hemos visto las asíntotas verticales. Veamos la asíntota horizontal $y = n$:

$n = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \{$ dividiendo numerador y denominador por $x^2 \} =$

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = 1$

La asíntota horizontal es $y = 1$

- CUESTIÓN 3.B.

i) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto. [0.5 puntos]

ii) Calcule la recta tangente a la curva $f(x) = \ln(x^2)$ en el punto $x = 2$.

iii) Calcule el punto de corte de dicha recta con el eje y.

selcn Sep 2006 Solución:

ii) La ecuación punto pendiente de la recta es $y - y_0 = m(x - x_0)$, la recta tangente a $f(x) = \ln(x^2)$ en el punto x_0, será:

$y_0 = f(x_0) = f(2) = \ln(2^2) = \ln 4$

$m = f'(x_0); \quad f'(x) = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}; \quad f'(2) = 1$

La recta tangente es $y - \ln 4 = 1(x - 2)$

iii) El punto de corte con el eje OY corresponde con $x = 0$, $y = \ln 4 - 2$

- CUESTIÓN 4.A.

Calcule la siguiente integral.

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2-4}dx$$

selcn Sep 2006 Solución:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-4}dx = \begin{array}{l}\text{dividiendo}\\ \text{cociente} = 1\\ \text{resto} = 5\end{array} \qquad = \int \left(1 + \frac{5}{x^2-4}\right) dx$$

Descomponiendo en fracciones simples: $\dfrac{5}{x^2-4} = \dfrac{5}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+2} = \dfrac{A(x+2)+B(x-2)}{x^2-4}$

Identificando numeradores:

Para $x = 2$ queda $5 = 4A$; $\quad A = \dfrac{5}{4}$

Para $x = -2$ queda $5 = -4B$; $\quad B = -\dfrac{5}{4}$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-4}dx = \int \left(1 + \frac{5/4}{x-2} - \frac{5/4}{x+2}\right) dx = 1 + \frac{5}{4}\ln|x-2| - \frac{5}{4}\ln|x+2|$$

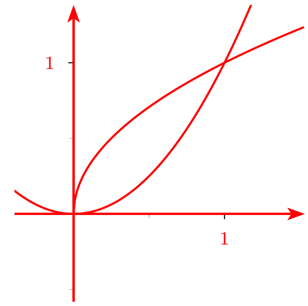
$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2-4}dx = \left[x + \frac{5}{4}\ln|x-2| - \frac{5}{4}\ln|x+2|\right]_0^1 = 1 + \frac{5}{4}\ln|-1| - \frac{5}{4}\ln|3| - \left[\frac{5}{4}\ln|-2| - \frac{5}{4}\ln|2|\right] = 1 - \frac{5}{4}\ln|3| = -0'373$$

- CUESTIÓN 4.B.

Calcule el área de la región determinada por las curvas $y = x^2$ e $y = x^{1/2}$.

selcn Sep 2006 Solución:

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}} - x^2 ds = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$



15.2. Junio 2006

- CUESTIÓN 1.A.

  i) Enuncie el Teorema de Rouché-Fröbenius [0.5 puntos]

  ii) Estudie, según los valores del parámetro a, el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} ax + ay = a \\ x - y + az = a \\ x + 2y + 3z = a \end{array}\right.$$

selcn Jun 2006 Solución:

La matriz ampliada es

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 0 & a \\ 1 & -1 & a & a \\ 1 & 2 & 3 & a \end{pmatrix}$$

Hacemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3a + a^2 - 2a^2 - 3a = -a^2 - 6a = -a(a+6) \text{ Se anula para } a = 0; \quad a = -6$$

Para $a \neq 0, -6$; ran(M) =3 = ran(A) = n^0 incógnitas sist. COMPATIBLE DETERMINADO

Para $a = 0$ queda:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & |0 & 0 \\ 1 & 2 & |3 & 0 \end{pmatrix}$$ que incluye un menor no nulo de orden 2 dentro de la matriz de coeficientes. Por tanto:

Si $a = 0$: : ran(M)= 2 = ran$(A) < 3 = n^0$ incógnitas sist. COMPATIBLE INDETERMINADO

Para $a = -6$ queda:

$$A = \begin{pmatrix} -6| & -6 & 0| & -6 \\ 1| & -1 & -6| & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$ que incluye ese menor no nulo de orden 2 dentro de la matriz de coeficientes.

Orlando con la columna de términos independientes obtenemos el determinante:

$$\begin{vmatrix} -6 & 0 & -6 \\ -1 & -6 & -6 \\ 2 & 3 & -6 \end{vmatrix} = -378 \text{ Distinto de cero, por tanto:}$$

Si $a = -6$: : ran(M)= $2 \neq 3$ = ran(A) sist. INCOMPATIBLE

- CUESTIÓN 1.B.

  i) Estudiar si los vectores $\vec{v}_1 = (a, -a, 1), \vec{v}_2 = (2a, 1, 1)$ y $\vec{v}_3 = (1, -1, -1)$ son linealmente independientes en función del valor del parámetro a.

  ii) Cuando sean linealmente dependientes, escribir, si es posible, $\vec{v}_3$ como combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

selcn Jun 2006 Solución:

i) Estudiamos el rango de la matriz formada por sus coordenadas, para ello hacemos su determinante:

$$\begin{vmatrix} a & -a & 1 \\ 2a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -a - a - 2a - 1 + a - 2a^2 = -2a^2 - 3a - 1 = 0;$$

$$2a^2 + 3a + 1 = 0; \quad a = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Para $a \neq -1$ y $a \neq -\dfrac{1}{2}$ los vectores son linealmente independientes.

En otro caso son linealmente dependientes.

ii) Para $a = -1$, son linealmente dependientes, la matriz de coordenadas queda: $\left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & |1 \\ -2 & 1 & |1 \\ \hline 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$ El menor señalado es no nulo, entonces vamos a escribir $\vec{v}_3$ como combinación lineal de los dos primeros, cosa inmediata pues $\vec{v}_3 = \vec{v}_1$.

Para $a = -1/2$, son linealmente dependientes, la matriz de coordenadas queda: $\left(\begin{array}{ccc} -1/2 & 1/2 & |1 \\ -1 & 1 & |1 \\ \hline 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$ El menor señalado es no nulo, entonces vamos a escribir $\vec{v}_3$ como combinación lineal de los dos primeros, cosa inmediata pues $v_3 = \vec{v}_2$.

- CUESTIÓN 2.A.

  Las trayectorias de dos aviones vienen dadas por las rectas:

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array} \right. \qquad r_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{array} \right.$$

  i) Estudie si las trayectorias se cortan, se cruzan o son coincidentes.

  ii) Calcule la distancia mínima entre ambas trayectorias.

selcn Jun 2006 Solución:

i) $r_1 : \left\{ \begin{array}{l} P_1(1,1,1) \\ \vec{v_1} = (1,-1,2) \end{array} \right. \qquad r_2 : \left\{ \begin{array}{l} P_2(1,0,2) \\ \vec{v_2} = (-1,1,0) \end{array} \right. ; \qquad \vec{P_1P_2} = (0,-1,1)$

Las rectas no son paralelas porque los vectores dirección no son proporcionales.

$$rango(\vec{P_1P_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2}) : \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \text{ el rango es tres, Las rectas se cruzan}$$

ii) Para hallar la mínima distancia entre las rectas hallamos el plano π que contiene a r_1 y es paralelo a r_2

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; -2x - 2y + 4 = 0; \quad \pi : x + y - 2 = 0$$

Entonces: $d(r_1, r_2) = d(P_2, \pi) = \left| \dfrac{1+0+0-2}{\sqrt{1+1}} \right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

- CUESTIÓN 2.B.

La trayectoria de un proyectil viene dada por la recta:

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

i) Estudie si el proyectil impactará con la superficie determinada por el plano 3x+y-z=0.

ii) Calcule el punto de impacto y la distancia recorrida por el proyectil desde el punto inicial $P = (2, 3, 1)$ hasta el punto de impacto.

selcn Jun 2006 Solución:

i) Planteamos que un punto de la recta esté en el plano, sustituyendo su expresión paramétrica en el ecuación del plano: $3(2 - \lambda) + 3 + \lambda - 1 - 2\lambda = 0$, da como solución $\lambda = 2$ que sustituido en la recta da el punto

$$\begin{cases} x = 2 - 2 = 0 \\ y = 3 + 2 = 5 \\ z = 1 + 2 \cdot 2 = 5 \end{cases}$$ Por tanto el punto de impacto sobre el plano π es $Q(0, 5, 5)$

ii) La distancia entre P y Q es el módulo del vector $\vec{PQ} = (-2, 2, 4)$

$|\vec{PQ}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ es la distancia recorrida.

- CUESTIÓN 3.A.

Dada la función $f(x) = x/(x^2 - 1)$, se pide:

i) Dominio de definición y cortes con los ejes. [0.5 puntos]

ii) Intervalos en los que es positiva y en los que es negativa. [0.5 puntos]

iii) Asíntotas. [0.5 puntos]

iv) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento. [0.5 puntos]

v) Representación aproximada. [0.5 puntos]

selcn Jun 2006 Solución: Vamos a limitarnos a representar por camino corto, el resto de apartados se puede ver en Junio 2008 CUESTIÓN 3.A.

1) Dominio y regionamiento

Hallando las raíces de numerador y denominador resulta que delimitan región de cambio de signo de y: $x = 0, x = \pm 1$

x		-1		0		1	
y	$-$		$+$		$-$		$+$

2) Puntos de corte con los ejes

con $OX: y = 0$, resulta $x = 0$

con $OY: x = 0$, resulta el mismo

3) Asíntotas

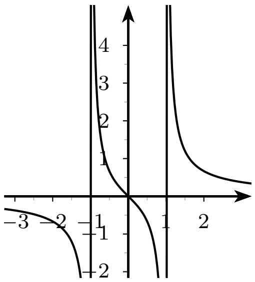
verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales $x = \pm 1$

horizontales $n = \lim_{x \to \infty} (f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0$ El eje de abcisas es asíntota.

4) Extremos y crecimiento

$f'(x) = \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$ Que no se anula nunca y es siempre negativa, luego la función es siempre creciente.



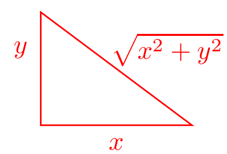
- CUESTIÓN 3.B.

Construir un triángulo rectángulo de perímetro 3 con área máxima.

selcn Jun 2006

Área: $S = \dfrac{x \cdot y}{2}$ máxima

Perímetro: $x + y + \sqrt{x^2+y^2} = 3$. Despejamos y:



$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = (3-x-y)^2 \qquad x^2+y^2 = 9+x^2+y^2-6x-6y+2xy$

$2xy-6y-6x+9=0 \qquad 2xy-6y=-9+6x$

$y(2x-6) = -9+6x \qquad y = \dfrac{-9+6x}{2x-6}$ Sustituyendo en S:

$$S(x) = \frac{x \cdot \frac{-9+6x}{2x-6}}{2} = \frac{-9x+6x^2}{4x-12} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2x^2-3x}{x-3} \text{ha de ser máximo}$$

$$S'(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{(4x-3)(x-3)-(2x^2-3x)}{(x-3)^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4x^2-12x-3x+9-2x^2+3x}{(x-3)^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2x^2-12x+9}{(x-3)^2} = 0$$

$$2x^2-12x+9=0 \qquad x = \frac{12 \pm \sqrt{144-72}}{4} = \frac{12 \pm \sqrt{72}}{4} = \begin{array}{l} \nearrow \ 5,12 \\ \searrow \ 0,87 \end{array}$$

A partir del anunciado se deduce que la solución es por tanto $x = 0'87$ (isósceles)

- CUESTIÓN 4.A.

i) Enuncie el Teorema Fundamental del Cálculo. [0.5 puntos]

ii) Calcule la integral siguiente.

$$\int_0^1 (x^2-1)e^{-2x}dx$$

selcn Jun 2006 Solución:

Calculamos la primitiva por partes:

$$\int (x^2-1)e^{-2x}dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2-1 & du = 2xdx \\ dv = e^{-2x}dx & v = \int e^{-2x}dx = \frac{-1}{2}\int -2e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array} \right\} =$$

$$-(x^2-1)\frac{1}{2}e^{-2x} - \int -\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot 2xdx = -\frac{x^2-1}{2}e^{-2x} + \int xe^{-2x}dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^{-2x}dx & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array} \right\} =$$

$-\frac{x^2-1}{2}e^{-2x} - x\frac{1}{2}e^{-2x} - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}dx = -\frac{x^2-1}{2}e^{-2x} - \frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} = e^{-2x}\left(-\frac{x^2-1}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}e^{-2x}(-2x^2-2x+1)$

$$\int_0^1 (x^2-1)e^{-2x}dx = \left[\frac{1}{4}e^{-2x}(-2x^2-2x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{4}[e^{-2}(-2-2+1)-e^0] = \frac{-3e^{-2}-1}{4}$$

- CUESTIÓN 4.B.

  Calcule el área determinada por la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4x+3}$ y las rectas $y=0, x=0$ y $x=3$.

  selcn Jun 2006 Solución:

  $\int \frac{x^2}{x^2+4x+3}dx =$ dividiendo cociente = 1 resto = -4x-3 $= \int \left(1 + \frac{-4x-3}{x^2+4x+3}\right) dx$

  Descomponiendo en fracciones simples: $\dfrac{-4x-3}{x^2+4x+3} = \dfrac{-4x-3}{(x+1)(x+3)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+3} = \dfrac{A(x+3)+B(x+1)}{x^2+4x+3}$

  Identificando numeradores:

  Para $x=-1$ queda $1 = 2A$; $A = \frac{1}{2}$

  Para $x=-3$ queda $9 = -2B$; $B = -\frac{-9}{2}$

  $$\int \frac{-4x-3}{x^2+4x+3}dx = \int \left(1 + \frac{1/2}{x+1} - \frac{9/2}{x+3}\right) dx = x + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{9}{2}\ln|x+3|$$

  El denominador de la función se anula para $x=-1$ $x=-3$, por tanto la función tiene signo constantemente positivo en la zona de integración, luego el área viene dada directamente por la integral definida.

  $\int_0^3 \frac{-4x-3}{x^2+4x+3}dx = \left[x + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{9}{2}\ln|x+3|\right]_0^3 = 3 + \frac{1}{2}\ln|4| - \frac{9}{2}\ln|6| - \left[\frac{1}{2}\ln|1| - \frac{9}{2}\ln|3|\right] = 3 + \frac{1}{2}\ln|4| - \frac{9}{2}\ln|6| + \frac{9}{2}\ln|3| = 0{,}573983$

Selectividad Matemáticas II (Murcia) 16

Año 2005

16.1. Septiembre 2005

- CUESTIÓN 1.1.

  1. Enunciado del Teorema de Rouché-Fröbenius. [0.5 PUNTOS]

  2. Los sistemas:

  $\begin{cases} ax+cy+bz=-4 \\ bx+ay+cz=-9 \\ cx+by+az=-11 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y+3z=1 \\ x+z=-1 \\ x-z=3 \end{cases}$

  son equivalentes. Hallar $a; b$ y c.

  selcn Sep 2005 Solución:

  Dos sistemas son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

  Resolvemos el segundo por reducción tipo Gauss, la matriz asociada es:

  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, restando a la 3^a la 2^a $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, queda $-2z=4, z=-2; \quad 1-2y-6=1, y=-3; \quad x-2=-1, x=1$

  sustituyendo las soluciones en el primer sistema resulta:

  $\begin{cases} a-3c-2b=-4 \\ b-3a-2c=-9 \\ c-3b-2a=-11 \end{cases} \qquad \begin{cases} a-2b-3c=-4 \\ -3a+b-2c=-9 \\ -2a-3b+c=-11 \end{cases} \qquad |M| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -52$

  $a = \dfrac{\begin{vmatrix} -4 & -2 & -3 \\ -9 & 1 & -2 \\ -11 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-52} = \dfrac{-156}{-52} = 3; \quad b = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -3 & -9 & -2 \\ -2 & -11 & 1 \end{vmatrix}}{-52} = \dfrac{-52}{-104} = 2; \quad c = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & -9 \\ -2 & -3 & -11 \end{vmatrix}}{-52} = \dfrac{-52}{-52} = 1$

  Luego los sistemas son equivalentes para: $a=3, b=2, c=1$

- CUESTIÓN 1.2.

1. Se consideran los vectores: $\mathbf{u}_1 = (1,1,2), \mathbf{u}_2 = (-1,1,0), \mathbf{v}_1 = (0,-1,1)$ y $\mathbf{v}_2 = (1,-2,0)$. Demostrar que para todo número real a, el vector $(-2a, 3a, a)$ es combinación lineal de $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ y también de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

2. Elegir tres vectores linealmente independientes entre los $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ y escribir el otro como combinación lineal de ellos.

selcn Sep 2005 Solución:

1. Para ver que el vector $(-2a, 3a, a)$ es combinación lineal de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ basta estudiar el rango de la matriz formada por sus coordenadas, para ello hacemos su determinante:

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ \cline{1-2} -2a & 3a & a \end{array} \right| = 0;$$

el menor señalado es no nulo por tanto el tercero se puede escribir como combinación lineal de los dos primeros.

De la misma forma para $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$:

$$\left| \begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ \cline{1-2} -2a & 3a & a \end{array} \right| = 0;$$

el menor señalado es no nulo por tanto el tercero se puede escribir como combinación lineal de los dos primeros.

2. Veamos el determinante formado por las coordenadas de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0;$$

Luego esos tres vectores forman base de R^3, luego $\mathbf{v}_2$ se podrá escribir como combinación lineal de ellos:

$\mathbf{v}_2 = x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 + z\mathbf{v}_1$

$x(1,1,2) + y(-1,1,0) + z(0,-1,1) = (1,-2,0)$ Separando coordenadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y = 1 \\ x + y - z = -2 \\ 2x + z = 0 \end{array} \right. \qquad |M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-1}{4}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-5}{4}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-52} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Por tanto: $\mathbf{v}_2 = -\dfrac{1}{4}\mathbf{u}_1 - \dfrac{5}{4}\mathbf{u}_2 + \dfrac{1}{2}\mathbf{v}_1$

- CUESTIÓN 2.1.

1. Estudiar si las rectas:

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{array} \right. \qquad L_2 : \left\{ \begin{array}{l} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{array} \right.$$

se cruzan.

2. Encontrar la distancia entre dichas rectas.

selcn Sep 2005 Solución:

i) $r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad \begin{cases} P_1(0,0,2) \\ \vec{v_1} = (1,1,1) \end{cases}$

La recta r_2 está dada por intersección de planos $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$, para hallar un vector dirección hacemos el producto vectorial de los vectores ortogonales a los planos: $\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ Para hallar un punto hacemos por ejemplo $y = 0$ en el sistema y queda $\begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases}$ resulta $x = -3, z = -2$

Otra opción mejor habría sido parametrizar la recta pasando por ejemplo la variable y al segundo miembro:

$r_2 : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \begin{cases} z = 1 + x + y \\ x = -3 - 2y \end{cases} \begin{cases} z = 1 - 3 - 2y + y \\ x = -3 - 2y \end{cases} \begin{cases} z = -2 - y \\ x = -3 - 2y \end{cases} \begin{cases} x = -3 - 2y \\ y = y \\ z = -2 - y \end{cases}$

Por tanto $r_2 : \begin{cases} P_2(-3, 0, -2) \\ \vec{v_2} = (2, -1, 1)) \end{cases}$

Las rectas no son paralelas porque los vectores dirección no son proporcionales.

Consideramos el vector $\vec{P_1P_2} = (-3, 0, -4)$

$rango(\vec{P_1P_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2}) : \begin{vmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, el rango es tres, Las rectas se cruzan

ii) Para hallar la mínima distancia entre las rectas hallamos el plano π que contiene a r_1 y es paralelo a r_2

$\pi : \begin{vmatrix} x & y & z - 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2x + y - 3z + 6; \quad \pi : 2x + y - 3z + 6 = 0$

Entonces: $d(r_1, r_2) = d(P_2, \pi) = \left| \dfrac{-6 + 6 + 6}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} \right| = \dfrac{6}{\sqrt{14}}$

- CUESTIÓN 2.2.

1. Demostrar que las rectas:

$$L_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad L_2 : \begin{cases} 3x - y + 4 = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$$

son paralelas.

2. Encontrar la ecuación de un plano paralelo al determinado por dichas rectas y que diste de él $\sqrt{6}$.

selcn Sep 2005 Solución: a)

Para comprobar la posición de las rectas hallamos un punto y un vector dirección en cada recta:

$L_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad \begin{array}{l} P(1,3,3) \\ \vec{v} = (1,3,1) \end{array}$

$L_2: \begin{cases} 3x - y + 4 = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases} \qquad \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -11 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ Sustituyendo en las ecuaciones $x = 0$ obtenemos el punto $Q(0,4,4)$ (habría sido más corto poner las ecuaciones paramétricas despejando y y z en función de x)

Obtenemos el vector $\vec{PQ} = -1, 1, 1)$.

Por tanto ha resultado que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son proporcionales luego las recta son paralelas o coincidentes, como $\vec{PQ}$ no es proporcional efectivamente las rectas son paralelas.

b) Primero buscamos el plano π que contiene a las dos rectas paralelas:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 2y + 2z - 8; \qquad \pi: x - y + 2z - 4 = 0$$

Buscamos ahora plano paralelo $\pi': x - y + 2z + D = 0$ que diste de él $\sqrt{6}$, tomamos el punto $P(1,3,3) \in \pi$

$$d(\pi, \pi') = d(P,, \pi') = \sqrt{6} = \left| \frac{1 - 3 + 6 + D}{\sqrt{1+1+4}} \right| = \left| \frac{4+D}{\sqrt{6}} \right|;$$

$$\pm\sqrt{6} = \frac{4+D}{\sqrt{6}} \begin{cases} 6 = 4 + D; \quad D = 2; \qquad \pi_1' = x - y + 2z + 2 = 0 \\ -6 = 4 + D; \quad D = -10; \qquad \pi_2' = x - y + 2z - 10 = 0 \end{cases}$$

- CUESTIÓN 3.1.

  La curva de ecuación $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos $(1,0)$ y $(0,-1)$ y tiene un mínimo para $x = 2$. Se pide:

  1. Encontrar a, b y c.

  2. Representar de forma aproximada dicha curva.

  selcn Sep 2005

  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

  Pasa por $P_1(0,-1))$: $\qquad c = -1$

  Pasa por $P_1(1,0)$: $\qquad 1 + a + b - 1 = 0; \qquad a = -b$

  Mínimo den $x = 2$:

  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ como $f'(2) = 0 \qquad 12 + 4a + b = 0; \qquad 12 + 4(-b) + b = 0; \qquad 12 - 3b = 0; \qquad b = 4$ luego $a = -4$

  Vamos a representar: $y = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

  Como es un polinomio basta con los puntos de corte y el crecimiento

  1. Puntos de corte:

  con $OY: x = 0$, lo dan resulta $y = -1$

  con $OX: y = 0$, como pasa por el punto $1, 0)$ aplicamos Ruffini:

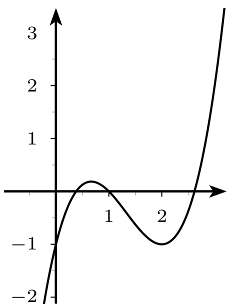
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 4 & -1 \\ 1 & & 1 & -3 & 1 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}$$. Anulamos el cociente: $x^2 - 3x + 1 = 0; x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} =$

$\nearrow$ $2'6$

$\searrow$ $0'38$

2. Extremos y crecimiento: $y' = 3x^2 - 8x + 4$, se anula para $x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6}$ $\nearrow$ 2 $\searrow$ $\frac{2}{3}$

x		$\frac{2}{3}$		2	
y'	$+$	$\boxed{-}$	$+$		
y	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

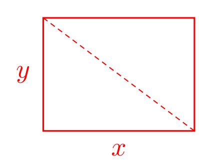


- CUESTIÓN 3.2.

De todos los rectángulos de diagonal $6\sqrt{2}$, encontrar las dimensiones del de perímetro máximo.

selcn Sep 2005 Solución:

Perímetro: $L = 2x + 2y$ máximo
Diagonal: $x^2 + y^2 = (6\sqrt{2})^2 = 72$. Despejamos y:
$y = \sqrt{72 - x^2}$
Sustituyendo en L: $L(x) = 2x + 2\sqrt{72 - x^2}$ máximo



Ahora anulamos la derivada:

$$L'(x) = 2 + 2\frac{-2x}{2\sqrt{72 - x^2}}$$

$$L'(x) = 2 - \frac{-2x}{\sqrt{72 - x^2}} = \frac{2\sqrt{72 - x^2} - 2x}{\sqrt{72 - x^2}} = 0$$

$2\sqrt{72 - x^2} - 2x = 0;$

$\sqrt{72 - x^2} = x;$

$\left(\sqrt{72 - x^2}\right)^2 = x^2;$

$72 - x^2 = x^2; \quad 2x^2 = 72 \quad x^2 = 36; x = \pm 6$

A partir del anunciado se deduce que la solución es por tanto $x = 6$, un cuadrado

- CUESTIÓN 4.1.

Encontrar el área del recinto determinado por las curvas $y = \dfrac{2}{1+x^2}$ e $y = x^2$.

selcn Sep 2005 Solución:

Veamos los puntos de corte entre las dos gráficas:

$$\frac{2}{1+x^2} = x^2$$

$$\frac{2}{1+x^2} - x^2 = 0; \quad \frac{2-x^2-x^4}{1+x^2} = 0; \quad x^4+x^2-2=0$$

$$x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \left\{ \begin{array}{c} -2 \\ 1 \end{array} \right. \quad ; \quad x = \pm 1$$

En la zona de integración $y = \dfrac{2}{1+x^2}$ es más grande que $y = x^2$ por tanto el área viene dada directamente por la integral, como además hay simetría respecto a OY:

$$\int_0^1 (\frac{2}{1+x^2} - x^2)dx = \left[2ar\tan x - \frac{x^3}{3}\right] 0^1 = 2ar\tan 1 - \frac{1^3}{3} - 0 = 2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

El área es $S = \pi - \dfrac{2}{3}$

- CUESTIÓN 4.2.

1. Justificar geométricamente que si f y g son funciones positivas en el intervalo $[a,b]$ y si para todo x en dicho intervalo, $f(x) \leq g(x)$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

2. Demostrar que $\dfrac{1}{2} \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$

selcn Sep 2005 Solución:

1. Dado que si una función es positiva en un intervalo su integral definida es el área que encierra con el eje OX en ese intervalo, resulta evidente la justificación geométrica pedida.

2. Tenemos que en el intervalo $[0,1]$

$$\frac{1}{1+x^4} \geq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} \geq \int_0^1 \frac{1}{2}dx = \left[\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

16.2. Junio 2005

- CUESTIÓN 1.1.

Estudiar, según los valores del parámetro a, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{l} ay + z = a - 1 \\ -ax + (a+1)y = a \\ ax - y + (2a-1)z = 2a + 1 \end{array}\right.$$

selcn Jun 2005 Solución:

La matriz ampliada es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 & a-1 \\ -a & a+1 & 0 & a \\ a & -1 & 2a-1 & 2a+1 \end{pmatrix}$$

Hacemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ -a & (a+1) & 0 \\ a & -1 & (2a-1) \end{vmatrix} = 2a^3 - 2a^2 = 2a^2(a-1) \text{ Lo anulamos } 2a^2(a-1) = 0, \quad a = 0; a = 1$$

Para $a \neq 0, 1$ ran(M) =3 $=$ ran$(A) = n^0$ incógnitas sist. COMPATIBLE DETERMINADO

Para $a = 0$ queda:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ la primera columna es de ceros, hacemos el determinante de lo que queda:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$ $= 0$ luego: ran(M)= 2 = ran$(A) < 3 = n^0$ incógnitas: sist. COMPATIBLE INDETERMINADO, soluciones dependientes de un parámetro.

Para $a = 1$ queda:

$$A = \left(\begin{array}{r|rr|r} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$ hacemos el determinante que orla ese menor de orden dos :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$ $= 6 \neq 0$ luego: ran(M)= $2 < 3 =$ ran(A) sist. INCOMPATIBLE

- CUESTIÓN 1.2.

1. Demostrar que cualquiera que sea el valor de a, los vectores: $\mathbf{u}_1 = (a, 1, 2), \mathbf{u}_2 = (1, 1, a)$ y $\mathbf{u}_3 = (3a-2, 1, 6-2a)$ son linealmente dependientes.

2. Si $a = 2$, escribir el vector $\mathbf{w} = (9, 2, 4)$ como combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$.

selcn Jun 2005 Solución:

1. Estudiamos el rango de la matriz formada por sus coordenadas, para ello hacemos su determinante:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a \\ 3a-2 & 1 & 6-2a \end{vmatrix} = 0;$$

Luego $\forall a$ los vectores $\mathbf{u}_1 = (a,1,2), \mathbf{u}_2 = (1,1,a)$ y $\mathbf{u}_3 = (3a-2,1,6-2a)$ son linealmente dependientes.

2. Se trata de escribir el vector $\mathbf{w} = (9,2,4)$ como combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}_1 = (2,1,2)$ y $\mathbf{u}_2 = (1,1,2)$.

$\mathbf{w} = x\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$; $\quad (9,2,4) = x(2,1,2) + y(1,1,2)$

Separando coordenadas: $\begin{cases} 2x+y=9 \\ x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$ La última ecuación es la segunda multiplicada por dos. Restando las dos primeras llegamos a $x=7$, por tanto $y=-5$

Podemos escribir: $\mathbf{w} = 7\mathbf{u}_1 - 5\mathbf{u}_2$

- CUESTIÓN 2.1.

  Encontrar la distancia del punto $P = (1,1,1)$ a la recta

  $$r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}$$

  selcn Jun 2005 Solución: $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

  Hay uno igual en septiembre 2006 CUESTIÓN 2.A

- CUESTIÓN 2.2.

  1. Demostrar que las rectas:

  $$L_1: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 4-t \end{cases}$$

  se cortan en un punto ¿Cuál es ese punto?

  2. Encontrar la ecuación del plano determinado por dichas rectas.

  selcn Jun 2005 Solución:

  a)

  Para comprobar la posición de las rectas consideramos un punto y un vector dirección en cada recta:

  $$L_1: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{array}{l} P(1,1,0) \\ \vec{v} = (2,-1,1) \end{array}$$

  $$L_2: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 4-t \end{cases} \qquad \begin{array}{l} Q(0,0,4) \\ \vec{w} = (1,0,-1) \end{array}$$

  Obtenemos el vector $\vec{PQ} = (-1,-1,4)$.

  Por tanto ha resultado que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no son proporcionales luego las rectas se cortan o se cruzan:

$det[\vec{v},\vec{w},\vec{PQ}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ por tanto las rectas se cortan.

Vamos a buscar el punto de corte:

$L_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{1}; \quad \left\{ \begin{array}{l} -x+1 = 2y-2 \\ y-1 = -z \end{array} \right. \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x+2y-3 = 0 \\ y+z-1 = 0 \end{array} \right.$

Añadimos la ecuación $y = 0$ que es uno de los planos que definen a L_2 y el punto de corte es la solución del sistema: $\left\{ \begin{array}{l} x+2y-3=0 \\ y+z-1=0 \\ y=0 \end{array} \right.$ Cuya solución es $y = 0, z = 1, x = 3$ El punto de corte es $C(3, 0, 1)$

b) Para hallar el plano determinado por las rectas tomamos el punto Q de L_2 y los respectivos vectores dirección de las rectas:

$\pi : \begin{vmatrix} x & y & z-4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2y - z + 4 - x - y = 0$. El plano es $\pi : x + 3y + z - 4 = 0$

- CUESTIÓN 3.1.

Se considera la curva definida por la función: $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$. Se pide:

1. Dominio de definición, cortes con los ejes y simetrías.
2. Asíntotas.
3. Intervalos de crecimiento de la función. ¿Tiene extremos la función?
4. Representación aproximada de la curva.
5. ¿Cuál será la gráfica de la curva $y = \dfrac{x^3}{x^2+1} + 1$?

selcn Jun 2005 Solución:

Vamos a limitarnos a representar por camino corto, el resto de apartados se puede ver en Junio 2008 CUESTIÓN 3.A.

1) Dominio y regionamiento

Hallando las raíces de numerador y denominador resulta que delimitan región de cambio de signo de y : $\quad x = 0$

x		0	
y	$-$		$+$

2) Puntos de corte con los ejes

con $OX : y = 0$, resulta $x = 0$

con $OY : x = 0$, resulta el mismo

3) Asíntotas

verticales valores de x en los que la función se va a infinito: no hay

horizontales $n = \lim_{x \to \infty} (fx) = \infty$ no hay

oblicuas $y = mx + n$

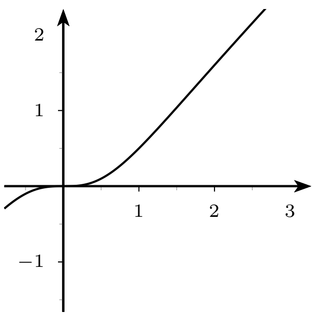
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x^2+1)} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2+1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{x^2+1} = 0$$

Asíntota oblicua: $y = x$

4) Extremos y crecimiento

$f'(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}$; $\quad x^4 + 3x^2 = 0$; $\quad x = 0$ doble. La derivada es siempre positiva luego es siempre creciente.



La variación que se indica en el punto 5. supone simplemente subir una unidad haca arriba la gráfica.

- CUESTIÓN 3.2.

De entre todos los números reales positivos x, y tales que $x + y = 10$, encontrar aquellos para los que el producto $p = x^2y$ es máximo.

selcn Jun 2005 Solución:

Buscamos $p = x^2y$ máximo.

$y = 10 - x$, sustituyendo

$p(x) = x^2(10 - x)$ máximo

$p(x) = 10x^2 - x^3$

Derivando: $p'(x) = 20x - 3x^2$, anulamos la derivada:

$20x - 3x^2 = 0$; $\quad x(20 - 3x) = 0$ resulta $x = 0$, $\quad x = \dfrac{20}{3}$

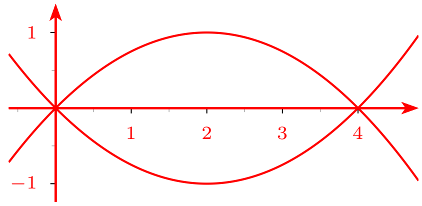
x		$\frac{20}{3}$	
$S'(x)$	$+$		$-$
$S(x)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

- CUESTIÓN 4.1.

1. Se consideran, en el plano, las curvas de ecuaciones $y = -\dfrac{x^2}{4} + x$ e $y = \dfrac{x^2}{4} - x$. Dibujar estas curvas.

2. Encontrar el área del recinto determinado por dichas curvas.

selcn Jun 2005 Solución:



$$\int_0^4 [(-\frac{x^2}{4}+x)-(\frac{x^2}{4}-x)]dx = \frac{1}{2}\int_0^4 (4x-x^2)dx =$$

$$\frac{1}{2}\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{1}{2}\left(32-\frac{64}{3}\right) = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}u^2$$

- CUESTIÓN 4.2.

  Calcular el valor de la integral: $I = \displaystyle\int_0^1 x\ e^x\ dx$

  selcn Jun 2005 Solución:

  $I = \displaystyle\int_0^1 x\ e^x\ dx$

  Calculamos la primitiva por partes:

  $$\int x\ e^x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array} \right\} = x\ e^x - \int e^x dx = x\ e^x - e^x$$

  $$\int_0^1 x\ e^x\ dx = [x\ e^x - e^x]_0^1 = e - e - (-1) = 1$$

Selectividad Matemáticas II (Murcia) 17

Año 2004

17.1. Septiembre 2004

- CUESTIÓN 1.1.

  a) Definición de rango de una matriz.

  b) Discutir, según los valores del parámetro a, el rango de la matriz:

  $$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  c) Una matriz de tres filas y cuatro columnas verifica que su segunda columna es toda ceros y la tercera columna es igual a la primera más la cuarta. ¿Cuál es el máximo rango que puede tener?

  selcn Sep 2004 Solución:

  b) Como los tres primeros elementos de la última fila son iguales a los de la primera las tres primeras columnas tienen rango 2. Consideramos el determinante que resulta de tomar las dos primeras columnas y la última: $\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = -a$ Por tanto:

  Para $a \neq 0$ el rango es tres.

  Para $a = 0$ $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cline{1-2} 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ el rango es dos.

  c) El máximo rango es 2.

- CUESTIÓN 1.2.

  a) Estudiar, según los valores del número real a, la dependencia lineal de los vectores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, a), \mathbf{e}_2 = (2, a, -1) y \mathbf{e}_3 = (0, 1, a)$.

  b) Para $a = 2$, escribir el vector $(-4, -8, 3)$ como combinación lineal de los $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$.

selcn Sep 2004 Solución:

a) Basta estudiar el rango de la matriz formada por sus coordenadas, para ello hacemos su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2;$$

- Para $a \neq -1$ el rango es 3, los tres vectores son linealmente independientes, forman base de R^3
- Para $a = -1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vert -1 \\ 2 & -1 & \vert -1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, el menor señalado es no nulo, el rango es 2, los vectores son linealmente dependientes.

b) Para $a = 2$ resulta:$\mathbf{e}_1 = (1,0,2), \mathbf{e}_2 = (2,2,-1) y \mathbf{e}_3 = (0,1,2)$.

Se podrá escribir $\mathbf{v} = (-4,-8,3)$ como combinación lineal de ellos:

$\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$

$x(1,0,2) + y(2,2,-1) + z(0,1,2) = (-4,-8,3)$ Separando coordenadas:

$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 2y + z = -8 \\ 2x - y + 2z = 3 \end{cases} \qquad |M| = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 9$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{9} = \frac{18}{9} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -8 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{9} = \frac{-27}{9} = 3; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{9} = \frac{-18}{9} = -2$$

Por tanto: $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$

- CUESTIÓN 2.1.

  Encontrar la distancia del punto $P(1,-1,2)$ al plano que contiene a la recta

  $$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

  y pasa por el punto $(2,1,3)$.

  selcn Sep 2004 Solución:

  $$r : \begin{cases} P_r(0,2,3) \\ \vec{v_r} = (1,-1,1) \end{cases} \qquad Q\vec{P}_r = (-2,1,0)$$

  Plano π que contiene a r y a Q: $\pi : \begin{vmatrix} x & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; x + 2y + z - 7 = 0 = 0$

  $$d(P,\pi) = \left| \frac{1 - 2 + 2 - 7}{\sqrt{1+4+1}} \right| = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

- CUESTIÓN 2.2.

  Dadas las rectas:

  $$L_1 : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 7 + 2t \\ z = -t \end{cases} \qquad L_2 : \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 3x + z - 8 = 0 \end{cases},$$

  se pide:

  a) Demostrar que están contenidas en un plano cuya ecuación se determinará.

  b) Encontrar la perpendicular común a dichas rectas.

  selcn Sep 2004 Solución:

  a) $L_1 : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 7 + 2t \\ z = -t \end{cases} \quad \begin{cases} P_1(4, 7, 0) \\ \vec{v_1} = (1, 2, -1) \end{cases}$

  Vamos a parametrizar la segunda recta dada por intersección de planos, nos basta pasar las x al segundo miembro: $L_2 : \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 3x + z - 8 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5 - x \\ z = 8 - 3x \end{cases} \quad \begin{cases} x = s \\ y = 5 - s \\ z = 8 - 3s \end{cases} \quad \begin{cases} Q(0, 5, 8) \\ \vec{v_2} = (1, -1, -3) \end{cases}$

  Vectores dirección no proporcionales luego no son paralelas.

  $\vec{QP} = (4, 7 - 5, 0 - 8) = (4, 2, -8)$.

  $[\vec{QP}, v_1, v_2] = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -8 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$ Luego las rectas se cortan y por tanto definen un plano π.

  $\pi : \begin{vmatrix} x - 4 & y - 7 & z \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -7x + 2y - 3z + 14 = 0$ el plano que definen las dos rectas que se cortan es $\pi : \quad 7x - 2y + 3z - 14 = 0$

  b) La perpendicular común podemos hallarla encontrando el punto de corte de las dos rectas y tomando el vector perpendicular del plano π, o bien por el método mas general de dar la perpendicular común como intersección de dos planos: uno que contiene a L_1 y es perpendicular a π y otro que contiene a L_2 y es perpendicular a π, lo haremos de ésta última manera:

  $\pi_1 : \begin{vmatrix} x - 4 & y - 7 & z \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 4x - 10y - 16z + 54 = 0; \qquad \pi_1 : 2x - 5y - 8z + 27 = 0$

  $\pi_2 : \begin{vmatrix} x & y - 5 & z - 8 \\ 1 & -1 & -3 \\ 7 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -9x - 24y + 5z + 80 = 0$

  La perpendicular común es por tanto: $r : \begin{cases} 2x - 5y - 8z + 27 = 0 \\ -9x - 24y + 5z + 80 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{8}{3} + \frac{7}{3}z \\ y = \frac{13}{3} - \frac{2}{3}z \\ z = z \end{cases}$

- CUESTIÓN 3.1.

a) Definición de derivada de una función en un punto.

b) Encontrar, utilizando la definición, la derivada de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ en el punto $(2, \dfrac{2}{5})$.

c) Encontrar la tangente a la curva $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ en el punto $(2, \dfrac{2}{5})$.

selcn Sep 2004 Solución:

b) $f'(2) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\frac{2+h}{(2+h)^2+1} - \frac{2}{2^2+1}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\frac{2+h}{5+4h+h^2} - \frac{2}{5}}{h} =$

$\lim_{h\to 0} \dfrac{\frac{10+5h-10-8h-2h^2}{5(5+4h+h^2)}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{-3h-2h^2}{5h(5+4h+h^2)} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h(-3-2h)}{5h(5+4h+h^2)} = \lim_{h\to 0} \dfrac{-3-2h}{5(5+4h+h^2)} = \dfrac{-3}{25}$

c) Ecuación punto pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$;

$y_0 = f(2) = \dfrac{2}{5}$

$m = f'(2) = \dfrac{-3}{25}; y - \dfrac{2}{5} = \dfrac{-3}{25}(x-2); \quad x + 25y - 16 = 0$

- CUESTIÓN 3.2.

De entre todos los rectángulos cuya diagonal mide 10 m, encontrar las dimensiones del de área máxima.

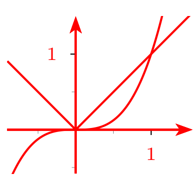
selcn Sep 2004 Solución: $x = \sqrt{50}$ cuadrado

Hay uno igual en sept 2005 CUESTIÓN 3.2

- CUESTIÓN 4.1.

Encontrar el área determinada por las curvas $y = |x|$ e $y = x^3$.

selcn Sep 2004 Solución:



$$S = \int_0^1 (x - x^3)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}u^2$$

- CUESTIÓN 4.2.

Calcular la integral $\displaystyle\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}dx$

¿Qué representa geométricamente el valor de dicha integral?

selcn Sep 2004 Solución:

La primitiva es $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-4}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-4| + C$

$$\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}dx = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2-4|\right]_3^7 = \frac{1}{2}(\ln 45 - \ln 5) = \ln 3 = 1'09$$

Como la función es constantemente positiva en la zona de integración la integral es el área que encierra la gráfica de $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ con el eje OX entre $x = 3$ y $x = 7$

17.2. Junio 2004

- CUESTIÓN 1.1.

  a) Estudiar, según los valores del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

  $$\begin{cases} x + ay - z = a \\ 2ax - y + az = 1 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

  b) Resolverlo, si es posible, utilizando la regla de Cramer para el valor $a = -1$.

  selcn Jun 2004 Solución:

  Consideramos la matriz del sistema:

  $$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 2a & -1 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Hacemos el determinante de la matriz de coeficientes:

  $$|M| \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2a & -1 & a \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 3a - 4; \quad a^2 + 3a - 4 = 0 \text{ se anula para } a = 1, -4$$

  - Para $a \neq 1, -4$, ran(M) $=3$ $=$ ran(A) $= n^0$ incógnitas sist. COMPATIBLE DETERMINADO
  - Para $a = 1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1| & -1 & 1 \\ 2 & -1| & 1 & 1 \\ \hline 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, orlamos el menor señalado con la columna de términos independientes: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, luego:

    Para $a = 1$, ran(M) $=2 \leq 3 =$ ran(A) sist. INCOMPATIBLE
  - Para $a = 1$ $\begin{pmatrix} 1 & -4| & -1 & -4 \\ -8 & -1| & -4 & 1 \\ \hline 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, orlamos el menor señalado con la columna de términos independientes: $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ -8 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, luego:

    Para $a = -4$, ran(M) $=2 \leq 3 =$ ran(A) sist. INCOMPATIBLE

  b) El sistema para $a = -1$ queda: $\begin{cases} x - y - z = -1 \\ -2x - y - z = 1 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$

  Por el apartado anterior sabemos que es compatible determinado, resolvemos por Cramer (el determinante de la matriz de coeficientes vale sustituyendo $a = -1$ en $|M| = a^2 + 3a - 4$ $|M| = -6$):

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-4}{6}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-5}{6}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{7}{6}$$

- CUESTIÓN 1.2.

  Dados los vectores de R^3 $\mathbf{e}_1 = (1,1,2), \mathbf{e}_2 = (2,5,1), \mathbf{e}_3 = (0,1,1)$ y $\mathbf{e}_4 = (-1,1,0)$, encontrar tres de ellos que formen una base de R^3 y escribir el otro como combinación lineal de dicha base.

  selcn Jun 2004 Solución: Veremos si los 3 primeros forman base y escribir el 4^0 como cl de ellos

  Hacemos el determinante formado con las coordenadas de los tres primeros $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ luego son linealmente independientes y por tanto: $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ es base de R^3

  Planteamos la combinación lineal: $\vec{e_4} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$ $(-1,1,0) = x(1,1,2) + y(2,5,1) + z(0,1,1)$ separando e igualando coordenadas queda el sistema: $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x + 5y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$

  que resolvemos por Cramer (el determinante de la matriz de coeficientes vale 6 pues vale lo mismo que el de su traspuesta ya hallado:

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-6}{6} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{0}{6} = 0; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{12}{-3} = 2$$

  Por tanto $\vec{e_4} = -\vec{e_1} + 2\vec{e_3}$

- CUESTIÓN 2.1.

  a) Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta r dada por la intersección de los planos $\pi_1 : x + y - z - 1 = 0 \qquad$ y $\pi_2 : 2x - y + z = 0$

  b) Encontrar la distancia del punto $(1,0,1)$ a dicha recta.

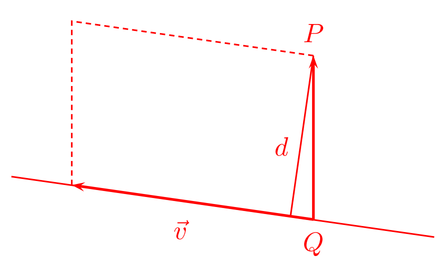
  selcn Jun 2004 Solución:

  a) Vamos a parametrizar la recta dada por intersección de planos, nos basta pasar las z al segundo miembro:

  $$r : \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1 + z \\ 2x - y = -z \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 1 \\ y = 2x - z = 2\frac{1}{3} - z \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} + s \\ z = s \end{cases} \quad \begin{cases} Q(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0) \\ \vec{v} = (0,1,1) \end{cases}$$

  b) Encontrar la distancia del punto $P(1,0,1)$ a dicha recta.

  La fórmula de a distancia de un punto a una recta es:

  $$d(P,r) = \frac{|\vec{PQ} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

  $$\vec{PQ} = (\frac{1}{3} - 1, \frac{2}{3}, 0 - 1) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -1)$$

  $$\vec{PQ} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$$

  $$d(P,r) = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{5^2 + 2^2 + (-2)^2}}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{2}} = 1'354$$

- CUESTIÓN 2.2.

a) Demostrar que las rectas:

$$L_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad L_2 : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

se cruzan en el espacio.

b) Encontrar la distancia entre dichas rectas.

selcn Jun 2004 Solución:

Consideremos un punto y un vector dirección de cada recta:

$$L_1 : x + 1 = y = z - 3 \quad \begin{cases} P_1(-1, 0, 3) \\ \vec{v_1} = (1, 1, 1) \end{cases}$$

Vamos a parametrizar la recta L_2 dada por intersección de planos, nos basta pasar las x al segundo miembro:

$$L_2 : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = -1 - 2x \end{cases} \quad \begin{cases} z = y + x = -1 - 2x + x = -1 - x \\ y = -1 - 2x \end{cases} \quad \begin{cases} x = s \\ y = -1 - 2s \\ z = -1 - s \end{cases}$$

$$L_2 : \begin{cases} Q(0, -1, -1) \\ \vec{v_2} = (1, -2, -1) \end{cases}$$

Como $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ no son proporcionales las rectas no son paralelas, por tanto se cortan o se cruzan. La mínima distancia entre ellas viene dada por la distancia de Q al plano π que contiene a L_1 y es paralelo a L_2:

$$\pi_: \begin{vmatrix} x & y & z - 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3x + 2y - z + 2 = 0$$

$$d(L_1, L_2) = d(Q, \pi) = \frac{0 - 2 + 1 + 2}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

- CUESTIÓN 3.1.

Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$, se pide:

a) Dominio de definición y cortes a los ejes.

b) Simetrías.

c) Asíntotas.

d) Posibles extremos de la función que define a la curva.

e) Con los anteriores datos, obtener una representación gráfica aproximada de la curva.

selcn Jun 2004 Solución:

Vamos a limitarnos a representar por camino corto, el resto de apartados se puede ver en Junio 2008 CUESTIÓN 3.A.

1) Dominio y regionamiento

Hallando las raíces de numerador y denominador resulta que delimitan región de cambio de signo de $y : x = \pm 1$

x		-1		1	
y	+		−		+

2) Puntos de corte con los ejes

con OX : $y = 0$, resulta $x = \pm 1$

con OY : $x = 0$, resulta $y = \dfrac{-1}{2}$

3) Asíntotas

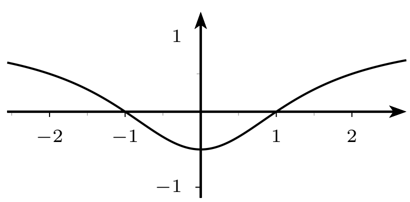
verticales valores de x en los que la función se va a infinito: no hay

horizontales $n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2} = 1$ Asíntota horizontal: $y = 1$

4) Extremos y crecimiento

$f'(x) = \dfrac{6x}{(x^2 + 2)^2}$ Que se anula en $x = 0$

x		0	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$



La función es simétrica respecto a OY, $f(-x) = f(x)$

- CUESTIÓN 3.2.

  Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 m. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de forma que uno de ellos tenga longitud doble de otro y tal que al construir con cada uno de ellos un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encontrar la longitud de cada trozo.

  selcn Jun 2004 Solución:

  Sea x el lado del cuadrado pequeño por tanto el otro tiene de lado $2x$, sea y el lado del tercer cuadrado:

  La longitud total es $4x + 4 \cdot 2x + 4y = 140$, luego $12x + 4y = 140$; $y = 35 - 3x$

  El área total es: $S(x) = x^2 + (2x)^2 + (35 - 3x)^2 = 14x^2 - 210x + 1225$

  Derivando $S'(x) = 28x - 210$ anulando la derivada: $28x - 210 = 0$; $x = \dfrac{15}{2}$

x		$\frac{15}{2}$	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$

  Luego el lado más pequeño es $\dfrac{15}{2}$ y los tres trozos son 30m, 60m y 50m.

- CUESTIÓN 4.1.

  Contestar, razonando la respuesta, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

b) $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$

c) Si $\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces $a = b$.

d) Si $\int_a^b f(x)dx = 0$ y $f(x) > 0$ para todo x, entonces $a = b$.

e) $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b b(x)dx$

selcn Jun 2004 Solución:

Teniendo en cuenta que la integral definida es el área encerrada por la curva con el eje OX entre los límites de integración (salvo el signo) se justifica que:

a) Verdadera

b) Falsa

c) Falsa

d) Verdadera

e) Verdadera

- CUESTIÓN 4.2.

  Calcular el área determinada por la curva $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = -1$.

selcn Jun 2004 Solución:

La primitiva es: $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}dx =$ dividiendo cociente = 1 resto = -1 $\displaystyle = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - ar\tan x + C$

La función es siempre positiva. Como la función es simétrica es más cómodo integrar entre 0 y 1 y luego multiplicar por dos:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx = [x - ar\tan x]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Área: $S = 2(1 - \frac{\pi}{4}) = 2 - \frac{\pi}{2} = 0'429$