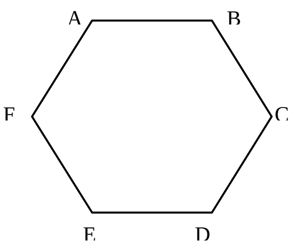
# VECTORES

**EJERCICIO 1 : ABCDEF son los vértices de un hexágono regular de centro O. En los siguientes pares de vectores compara sus módulos, direcciones y sentidos:**



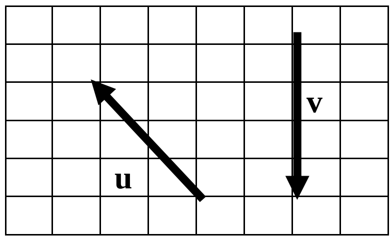

**a) AB y BC**

**b) BC y EF**

**c) AB y FC**

*a) AB y BC : Tienen el mismo módulo y distinta dirección. No se puede comparar el sentido.*
*b) BC y EF: Tienen el mismo módulo y dirección, y sentidos opuestos.*
*c) AB y FC: Tienen la misma dirección y sentido, pero distinto módulo.*

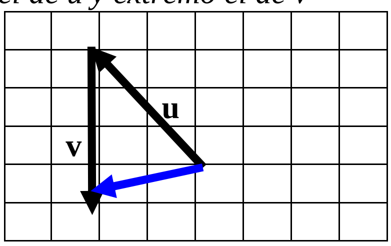
**EJERCICIO 2 : Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, representa los vectores:**



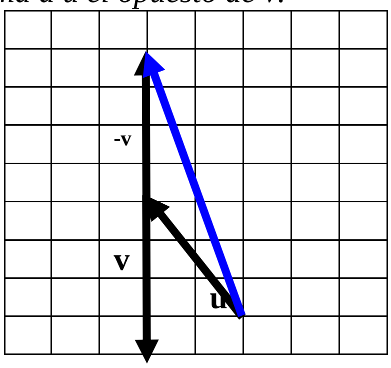

**a)** $\vec{u} + \vec{v}$

**b)** $\vec{u} - \vec{v}$

*a) Para sumar u y v, colocamos v de modo que su origen coincida con el extremo de u. u + v es el vector cuyo origen es el de u y extremo el de v*




*b) Para obtener u – v se le suma a u el opuesto de v.*




**EJERCICIO 3 : Dados los vectores u (2,1), v(1,-2). Calcular las coordenadas de los vectores:**

**a) u + v** **b) u – v** **c) 2u +** $\frac{1}{2}$**v**

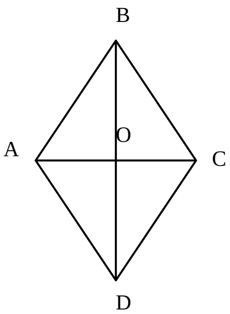
*a) u + v = (2,1) + (1,-2) = (2+1, 1-2) = (3,-1)*
*b) u – v = (2,1) – (1,-2) = (2-1, 1-(-2)) = (1,3)*
*c)* $2u + \frac{1}{2}v = 2(2,1) + \frac{1}{2}(1,-2) = (4,2) + (\frac{1}{2},-1) = (\frac{9}{2},1)$

**<u>EJERCICIO 4</u> : Calcular m y n para que se verifique w = mu+nv, siendo u(4,-8),v(0,2),w(2,-1)**

*(2,-1) = m(4,-8) + n(0,2)* $\Rightarrow \begin{cases} 2 = 4m \\ -1 = -8m + 2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{1}{2} \\ -1 = -4 + 2n \rightarrow n = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

*w =* $\frac{1}{2}u + \frac{3}{2}v$. *Así expresamos w como combinación lineal de u y v*

**<u>EJERCICIO 5</u> : La figura ABCD es un rombo de lado 6 cm y ángulos 60º y 120º. Halla:**




**a) AB. AD**

**b) DA.DC**

**c) OB.OC**

**d) AO.OC**

*a) AB.AD = |AB|.|AD|.cos 120º = 6.6.*$\left(-\frac{1}{2}\right)$ *= -18*

*b) DA.DC = |DA|.|DC|.cos 60º = 6.6.*$\frac{1}{2}$ *= 18*

*c) OB.OC = |OB|.|OC|.cos 90º = (3*$\sqrt{3}$*).3.0 = 0*

*d) AO.OC = |AO|.|OC|.cos 0º = 3.3.1= 9*

**<u>EJERCICIO 6</u> : Dados los vectores a(-3,4), b(5,-1), hallar:**

**a) a.b  b) |a|  c) |b|  d) ángulo que forman a y b**

*a)* *a.b = -3,5 + 4.(-1) = -15-4 = -19*
*b)* *|a| =* $\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$
*c)* *|b| =* $\sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$
*d)* *Cos (a,b) =* $\frac{a.b}{|a|.|b|} = \frac{-19}{5.\sqrt{26}} = -0{,}7452$

*Utilizando la calculadora: INV + COS 0,7452 +/- = 138º 10’ 35’’*

**<u>EJERCICIO 7</u> : Dado el vector v(-5,3), calcula las coordenadas de los siguientes vectores:**

**a) unitarios y de la misma dirección que v**
**b) ortogonales a v y del mismo módulo**
**c) Ortonormales a v**

*a)* *Para convertir un vector en unitario, lo dividimos por su módulo:*

*|v| =* $\sqrt{25+9} = \sqrt{34}$ $\Rightarrow$ $v_1 = \pm\left(-\frac{5}{\sqrt{34}}, \frac{3}{\sqrt{34}}\right)$

*Como queremos que tenga la misma dirección que u, nos quedamos con la solución positiva:* $v_1 = \left(-\frac{5}{\sqrt{34}}, \frac{3}{\sqrt{34}}\right)$

*b)* *Se permutan las coordenadas y se cambia una de signo:* $w_1 = (3,5)$ *y* $w_2 = (-3,-5)$

*Ortogonal y unitario: Dividimos los vectores $w_1$ y $w_2$ que son ortogonales entre su módulo para convertirlos en unitarios:* $|w_1| = |w_2| = |v| = \sqrt{34}$

$$z_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{5}{\sqrt{34}}\right) \quad y \quad z_2 = \left(\frac{-3}{\sqrt{34}}, \frac{-5}{\sqrt{34}}\right)$$

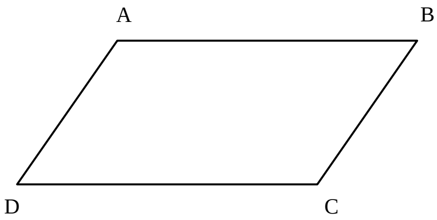
**<u>EJERCICIO 8</u> : Halla un vector v de módulo $\sqrt{5}$ y que forme con u(2,-4) un ángulo de 60º**

$$\text{Sea } v(x,y) \Rightarrow \begin{cases} |v| = \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{5} \Rightarrow x^2+y^2 = 5 \\ \cos 60^\circ = \dfrac{u.v}{|u|.|v|} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{2x-4y}{\sqrt{5}\sqrt{20}} \Rightarrow 2x-4y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ 2x-4y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5+4y}{2} \\ \dfrac{25+40y+16y^2}{4} + y^2 = 5 \Rightarrow 4y^2+8y+1 = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} y = -0{,}13 \to x = 2{,}24 \\ y = -1{,}86 \to x = -1{,}22 \end{array} \right. \end{cases}$$

*Hay dos soluciones:* $v_1(2{,}24;-0{,}13)$ *y* $v_2(-1{,}22;-1{,}86)$

**<u>EJERCICIO 9</u> : Dados los puntos A(3,-2), B(1,3), C(-6,0), halla el punto D de modo que ABCD sea un paralelogramo:**

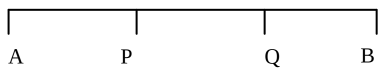



*AD = BC*

*(x,y) – (3,-2) = (-6,0) – (1,3)*

$$\begin{cases} x-3 = -7 \to x = -4 \\ y+2 = -3 \to y = -5 \end{cases} \Rightarrow D(-4,-5)$$

**<u>EJERCICIO 10</u> : Halla los puntos que dividen al segmento de extremos A(-2,3) y B(6,2) en tres partes iguales**




$$AB = 3(AP) \Rightarrow (6+2,2-3) = 3.(x+2,y-3) \Rightarrow \begin{cases} 8 = 3x+6 \to x = \dfrac{2}{3} \\ -1 = 3y-9 \to y = \dfrac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

$$\text{Q es el punto medio entre P y B} \Rightarrow Q = \left(\frac{\frac{2}{3}+6}{2}, \frac{\frac{8}{3}+2}{2}\right) = \left(\frac{20}{6}, \frac{14}{6}\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

**EJERCICIO 11 : Sabiendo que $|\vec{u}| = 4$ y $\dfrac{\vec{u}}{\vec{v}} = \dfrac{3}{2}$ calcula $\vec{u}\cdot\vec{v}$.**

*Solución:*

Puesto que $\dfrac{\vec{u}}{\vec{v}} = \dfrac{3}{2} \rightarrow \vec{u} = \dfrac{3}{2}\vec{v} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores que tienen la misma dirección y sentido $\rightarrow \left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = 0°$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\underbrace{\cos 0°}_{1} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}| = 4|\vec{v}| \\ \vec{u} = \dfrac{3}{2}\vec{v} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = \left(\dfrac{3}{2}\vec{v}\right)\cdot\vec{v} = \dfrac{3|\vec{v}|^2}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{3}{2}|\vec{v}|^2 = 4|\vec{v}| \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{3}{2}|\vec{v}|^2 - 4|\vec{v}| = 0 \rightarrow |\vec{v}|\left(\frac{3}{2}|\vec{v}| - 4\right) = 0 \rightarrow \frac{3}{2}|\vec{v}| - 4 = 0 \rightarrow |\vec{v}| = \frac{8}{3}$$

$|\vec{v}| \neq 0$ ya que $|\vec{u}| = 4$ y $\vec{u} = \dfrac{3}{2}\vec{v}$.

Por tanto, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4|\vec{v}| = 4\cdot\dfrac{8}{3} = \dfrac{32}{3}$.

**EJERCICIO 12 :**

**Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2$ y el ángulo que forman es de 30°, halla $|\vec{a}-\vec{b}|$ y $|\vec{a}+\vec{b}|$.**

*Solución:*

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = \left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\vec{a} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 30° = 3\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Luego:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = 3^2 - 2\cdot 3\sqrt{3} + 2^2 = 9 - 6\sqrt{3} + 4 \approx 2{,}61 \rightarrow |\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{2{,}61} \approx 1{,}62$$

Análogamente:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\vec{a} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 =$$

$$= 3^2 + 2\cdot 3\sqrt{3} + 2^2 = 9 + 6\sqrt{3} + 4 \approx 23{,}39 \rightarrow |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{23{,}39} \approx 4{,}84$$

**EJERCICIO 13 : Sabiendo que |u| = 3 y u = -5v. Calcular u.v**

*Solución:*

Puesto que $\vec{u} = -5\vec{v}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores que tienen la misma dirección pero sentido opuesto $\rightarrow \left(\widehat{\vec{u},\ \vec{v}}\right) = 180°$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\underbrace{\cos 180°}_{-1} = -|\vec{u}|\cdot|\vec{v}| = -3|\vec{v}| \\ \vec{u} = -5\vec{v} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = \left(-5\vec{v}\right)\cdot\vec{v} = -5|\vec{v}|^2 \end{array}\right\} \rightarrow -3|\vec{v}| = -5|\vec{v}|^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 5|\vec{v}|^2 - 3|\vec{v}| = 0 \rightarrow |\vec{v}|\left(5|\vec{v}| - 3\right) = 0 \rightarrow 5|\vec{v}| - 3 = 0 \rightarrow |\vec{v}| = \frac{3}{5}$$

$|\vec{v}| \neq 0$ puesto que $|\vec{u}| = 3 \neq 0$ y $\vec{u} = -5\vec{v}$

Por tanto: $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3|\vec{v}| = -3\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{-9}{5}$